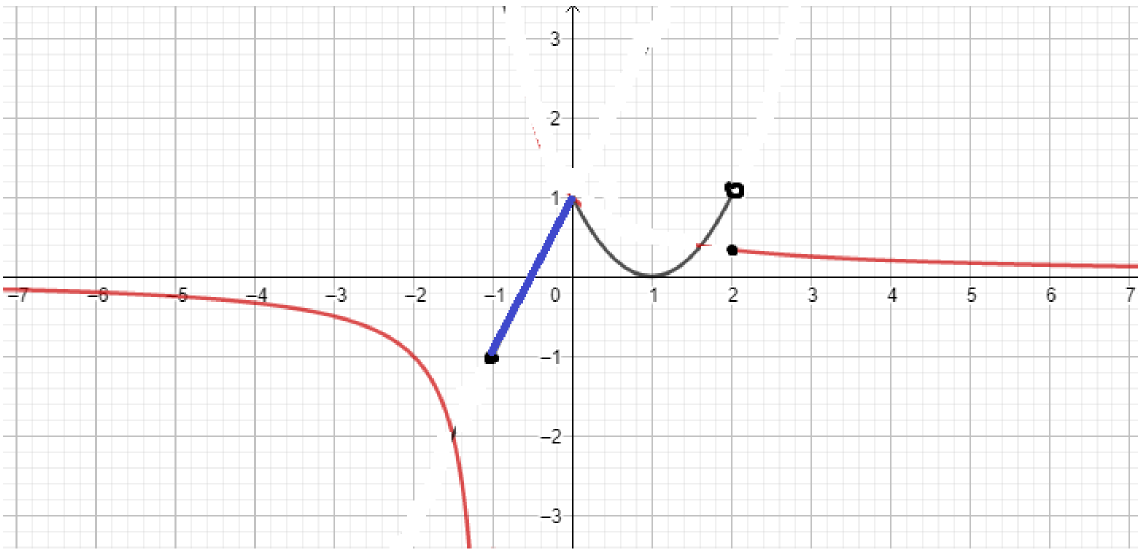
Ejemplo 1

Dada la siguiente gráfica de una función definida a trozos, contestar a las preguntas que se indican.



a) Estudiar la continuidad en x = -1
b) Estudiar la continuidad en x = 0
c) Estudiar la continuidad en x = 2
d) Calcular

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

a) Estudiar la continuidad en x = -1

Como debemos de recordar, para que una función sea continua en un punto se han de cumplir tres condiciones: **ha de existir la función para ese valor de *"x"*, ha de existir el límite cuando *"x"* tiende a ese valor y ambas cosas, el límite y la función, han de ser iguales.**

De la gráfica, deducimos que:

$$f(-1) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$$

Entonces no existe el límite puesto que no son iguales y, por lo tanto, la función no es continua en ***x = -1***. Además**, la discontinuidad es de salto, por ser los límites distintos. Por ser uno de ellos infinito, la discontinuidad se dice de salto infinito.**

b) Estudiar la continuidad en x = 0

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

La función es continua en *x = 0* puesto que se cumplen las tres condiciones, existe la función, existen los límites y ambos números son los mismos.

c) Estudiar la continuidad en x = 2

$$f(2) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{3}$$

Al tratarse de un dibujo, el valor de la función para x = 2, marcado con el punto negro, lo hemos calculado “relativamente a ojo”, considerando que la altura que se aprecia es la tercera parte de la unidad. Esto ocurre siempre cuando sacamos datos de una gráfica y no pasa nada. Sin embargo, para x = 0 la función coincide claramente con la altura unidad, ahí estaba claro el valor de la función.

La función no es continua en x = 2 puesto que no existe el límite, al ser distintos por la izquierda y por la derecha. Se trata entonces de una

discontinuidad de salto y, al no ser ninguno de los límites infinito, se denomina de salto finito.

d) Calcular

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Como se observa en la figura, a medida que nos vamos

trasladando tanto a la izquierda como a la derecha, la función en ambos casos se va haciendo cada vez más pequeña. Concluimos, por lo tanto, que ambos límites valen cero