DIBUJO DE FUNCIONES 2

En esta lección sólo vamos a ver otro ejemplo de dibujo de una función. Por ello, las explicaciones no serán tan concretas como en la lección anterior o las dedicadas a ello en “matemáticas de 1º”.

Vamos a estudiar y dibujar la función

$$\boldsymbol{y = Ln\frac{x}{x+1}}$$

Calculamos sus características fundamentales.

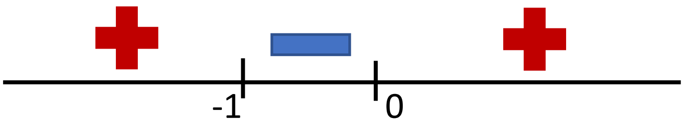
DOMINIO

Como debemos de saber, el logaritmo de un número sólo existe si ese número es positivo. Por lo tanto

$$\boldsymbol{D = \left\{x \in R / \frac{x}{x+1} > 0\right\}}$$

Resolvemos la inecuación

$$\begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$



Estudiamos el signo de la función para ***una “x”*** en cada intervalo

$$\begin{cases} x = -2 \rightarrow \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{-2}{-2+1} > 0 \\ x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} < 0 \\ x = 1 \rightarrow \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{1+1} > 0 \end{cases}$$

Los resultados los reflejamos en la recta que hemos dibujado encima de la llave. El dominio es, por lo tanto:

$$\boldsymbol{D}: \boldsymbol{x} \in (-\infty - \mathbf{1}) \cup (\mathbf{0}\ \infty)$$

Donde todos los extremos son abiertos pues no existe el logaritmo de ***0***, en nuestro caso cuando ***x=0***, y tampoco se puede anular el denominador, ***x=-1.***

ASÍNTOTAS

Asíntotas horizontales:

$$y = k = \lim_{x\to\infty} Ln \frac{x}{x+1} = Ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}\right) = Ln1 = 0$$

Donde hemos aplicado, y debemos de recordar, que **el límite del logaritmo es el logaritmo del límite.**

$$y = k = \lim_{x\to-\infty} Ln \frac{x}{x+1} = Ln\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1}\right) = Ln1 = 0$$

***Y=0* es la asíntota horizontal. Por lo tanto, no hay oblicuas**

Asíntotas verticales

Debemos de saber que el **logaritmo de una función puede tender a infinito si se cumple una de las dos condiciones siguientes.**

La función tiende a infinito

La función se acerca a cero positivo

La función

$$\frac{x}{x+1}$$

Se acerca a infinito si "x" se acerca -1. Se acerca a cero si "x" se acerca a cero. Haremos, por lo tanto, los límites cuando ***"x"*** se acerca a ***-1 y a 0***. Pero si nos fijamos en el dominio

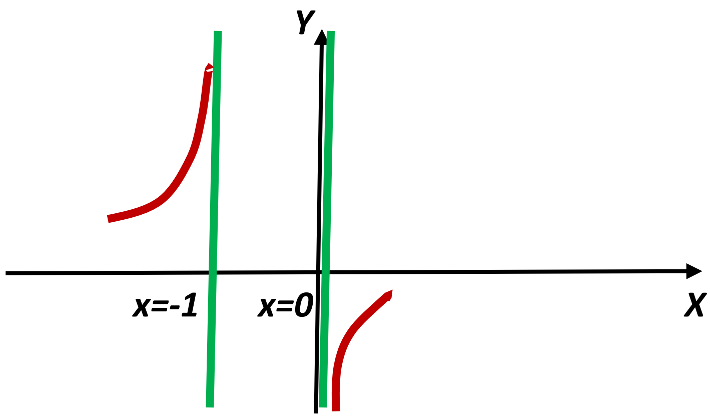
$$D: x \in (-\infty - 1) \cup (0\ \infty)$$

Nos acercaremos a ***x=-1*** por la izquierda (a la derecha no hay función) y a ***x=0*** por la derecha (a la izquierda no hay función)

$$\lim_{x\to -1^-} Ln\frac{x}{x+1} = Ln\left(\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x+1}\right) = Ln\left(\frac{-1}{0^-}\right) = Ln(\infty) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} Ln\frac{x}{x+1} = Ln\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+1}\right) = Ln\left(\frac{0^+}{1}\right) = Ln(0^+) = -\infty$$

Efectivamente, **x=-1 y x=0, son asíntotas verticales.** Teniendo el valor de los límites, la “pinta” de la función al lado de las asíntotas será algo así



MÁXIMOS Y MÍNIMOS. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Calculamos la primera derivada y estudiamos su signo. Para los valores de “x” que la hagan positiva, la función será creciente. Para lo que la hagan negativa, la función será decreciente.

$$y = Ln\frac{x}{x+1} \to y' = \frac{1}{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x(x+1)}$$

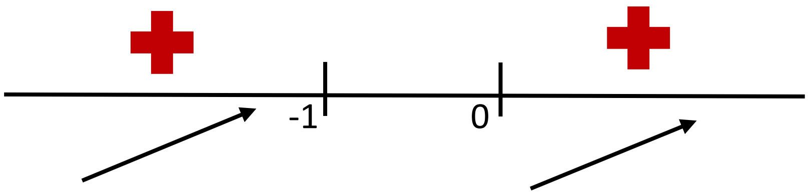
Las “x” que anulan el denominador son

$$x(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Esos valores parten al eje X en tres intervalos

Para ***x=-2*** la derivada es positiva

Para ***x=1*** la derivada es positiva



No se ha estudiado el signo de la derivada en el intervalo $(-1\ 0)$ porque en él no existe la función.

Sin embargo, para esos valores de "x" no se alcanzan ni máximos ni mínimos porque la función no existe, según sabemos del dominio.

SIGNO DE LA FUNCIÓN

En el caso de los logaritmos el signo de la función es un poco más complicado. Recordando la función $y = Lnx$, sabemos que es positiva para valores de ***"x"* mayores que *1*** y negativa para los valores de ***"x"* entre *0* y *1***. Por eso, en estas funciones, sino son especialmente complicadas, podemos calcular los cortes con los ejes y es suficiente para, con las características anteriores, dibujarla.

SIMETRIAS

El dominio no es simétrico, la función tampoco tiene simetrías entonces.

CORTES CON LOS EJES

Corte con eje Y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = Ln\dfrac{x}{x+1} \end{cases}$$

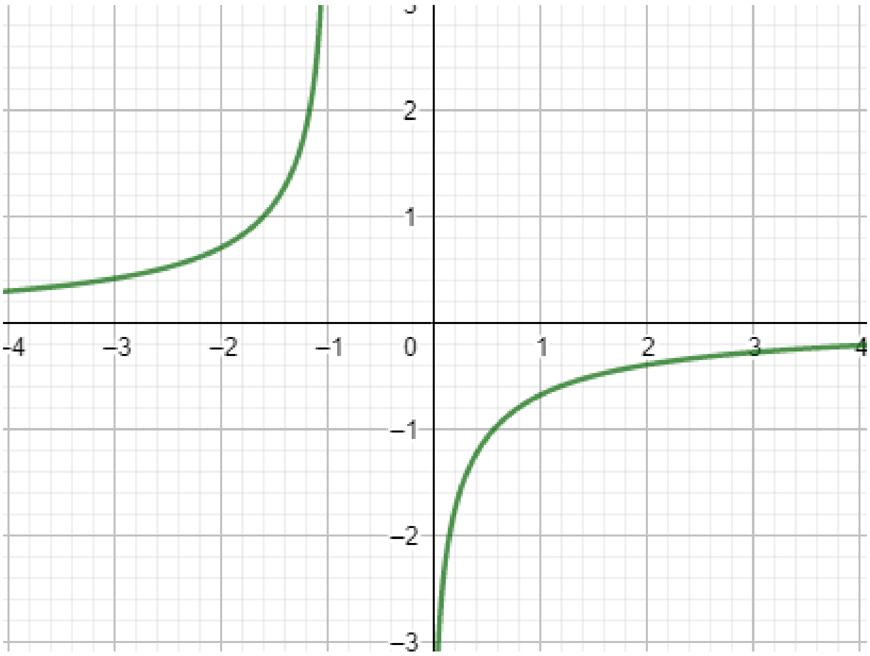
Que claramente no tiene solución pues ***x=0*** no pertenece al dominio

Corte con el eje X

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = Ln\dfrac{x}{x+1} \end{cases} \to 0 = Ln\frac{x}{x+1} \to \frac{x}{x+1} = 1 \to x = x+1 \to \nexists x$$

Por lo que tampoco corta al eje ***X***.

Insistimos que suelen ser funciones sencillas de dibujar, aunque viendo su expresión es normal que pensemos que pueden ser complicadas. Nos gustaría haber convencido de que no es así. El dibujo es el siguiente.



Donde se aprecian, sobre todo, las tres asíntotas.