victor loza
ACADEMIA ONLINE

EJEMPLOS VARIADOS NÚMEROS COMPLEJOS

Ejemplo 1

Calcular en forma binómica

$$\left(\frac{\mathbf{1+i}}{\mathbf{1-i}}\right)^7$$

Claramente, sino queremos estar una hora resolviendo, tenemos que pasar a forma polar:

$$1+i=\begin{cases} \rho=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \alpha=arctg\dfrac{1}{1}=arctg1=\begin{cases} \alpha=45\ si \\ \alpha=225\ (no) \end{cases} \end{cases}$$

Hemos elegido el ángulo de 45 porque el complejo está en el primer cuadrante. Por lo tanto

$$1+i=\sqrt{2}_{45}$$

$$1-i=\begin{cases} \rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \\ \alpha=arctg\dfrac{-1}{1}=arctg(-1)=\begin{cases} \alpha=135\ (no) \\ \alpha=315\ si \end{cases} \end{cases}$$

Donde **hemos elegido el ángulo de 315 porque nuestro complejo está en el cuarto cuadrante**.

Sustituimos los dos complejos ya en forma polar en la expresión que queremos calcular:

$$\left(\frac{\mathbf{1+i}}{\mathbf{1-i}}\right)^7=\left(\frac{\sqrt{2}_{45}}{\sqrt{2}_{315}}\right)^7=\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)_{45-135}\right]^7=(1_{-270})^7=$$

$$=(1^7)_{-270\cdot 7}=\mathbf{1_{-1890}}$$

Pero 1890 grados son varias vueltas enteras más un resto. Vamos a pasar ese ángulo a la primera vuelta:

$$\frac{-1890}{360} = -5{,}25 = -5 + (-0{,}25)$$

El resto, -0.25 vueltas, lo pasamos a grados $-0{,}25 \cdot 360 = \mathbf{-90}$

Siendo entonces el ángulo de -1890 cinco vueltas en sentido contrario al marcado positivo, que es en sentido contrario al giro de las agujas del reloj, más -90 grados. Podemos arreglar entonces la solución y ponerla en función de un ángulo menor que 360

$$\mathbf{1_{-1890} = 1_{-90} = 1 \cdot \big(\cos(-90) + \boldsymbol{i}sen(-90)\big) = -\boldsymbol{i}}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1} + \boldsymbol{i}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{i}}\right)^{\mathbf{7}} = -\boldsymbol{i}$$

Ejemplo 2

Calcular el valor de "a" para que el producto

$$(\boldsymbol{a} + \mathbf{2}\boldsymbol{i})(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})$$

Sea:

a) ***Real puro (no tenga parte imaginaria).***
b) ***Imaginario puro (no tenga parte real)***

Hacemos la operación:

$$(a + 2i)(1 + i) = a + ai + 2i + 2i^2 = \boldsymbol{a - 2 + i(a + 2)}$$

Para que sea real puro la parte imaginaria ha de ser cero:

$$a + 2 = 0 \rightarrow a = -2$$

Para que sea imaginario puro la parte real ha de ser cero

$$a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$$

Ejemplo 3

Resolver la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{x^2 + x + 1 = 0}$$

Se trata de una ecuación de segundo grado y como tal la resolvemos:

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i} \\ \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i} \end{cases}$$

Siendo las soluciones los números marcados en negrita.

Ejemplo 4

Resolver la ecuación

$$\boldsymbol{x^2 + 16 = 0}$$

$$x^2 = -16 \rightarrow x = \sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}\sqrt{-1} = \begin{cases} 0 + 4i = 4i \\ 0 - 4i = -4i \end{cases}$$

Donde hemos puesto el “cero” como sumando, para después quitarlo, para remarcar la idea de que **siempre las soluciones a una ecuación de segundo grado son dos números complejos conjugados**. En el ejemplo tres también son las dos soluciones conjugadas.