victor loza
ACADEMIA ONLINE

PROBLEMAS CÓNICAS

Ejemplo 1

Una elipse vertical, centrada en el origen, de semieje mayor a=4 tiene una excentricidad e=1/3. Calcular su ecuación.

Sabemos que la excentricidad es el cociente de "c", semidistancia focal, entre "a", el semieje mayor. Por lo tanto

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=4} \\ e=\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}} \rightarrow \dfrac{c}{4}=\dfrac{1}{3} \rightarrow \boldsymbol{c}=\dfrac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}} \end{cases}$$

Conocidos ya los valores de "a" y "c", calculamos el semieje menor "b"

$$a^2=b^2+c^2 \rightarrow b^2=4^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2\cdot 4^2}{3^2} \rightarrow \boldsymbol{b}=\sqrt{\frac{2\cdot 4^2}{3^2}}=\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\sqrt{\boldsymbol{2}}$$

Tenemos ya los tres parámetros que definen una elipse. Recordamos que **es una elipse vertical, por lo que el semieje mayor al cuadrado ha de ir de denominado de la variable "y".** Entonces su ecuación es

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow \frac{\boldsymbol{x^2}}{\frac{\boldsymbol{32}}{\boldsymbol{3}}}+\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{16}}=\boldsymbol{1}$$

Ejemplo 2

Calcular la ecuación de una hipérbola centrada en el origen, uno de cuyos focos es el punto C (0,3) y que pasa por el punto P (1, 9)

Dado que uno de los focos está en el eje Y sabemos ya que se trata de una hipérbola vertical y que, por ello, el término positivo de la ecuación es el término "$\boldsymbol{y^2}$"**.** Reflejemos en ecuaciones lo que sabemos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{c = 3} \\ \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \rightarrow |P\ (1,9)| \rightarrow \boldsymbol{\dfrac{9^2}{a^2} - \dfrac{1^2}{b^2} = 1} \end{cases}$$

Hemos llegado a las dos ecuaciones remarcadas en “negrita” pero tenemos tres incógnitas. La tercera ecuación que completa el sistema es la ecuación propia de la hipérbola que relaciona los tres parámetros:

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \boldsymbol{9 = a^2 + b^2}$$

El problema queda resuelto resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{9^2}{a^2} - \dfrac{1^2}{b^2} = 1} \\ \boldsymbol{9 = a^2 + b^2} \end{cases}$$

Que no resolvemos aquí por tratarse de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, propio de niveles inferiores. En la resolución, se elegirán los valores positivos para “a” y “b”, ya que son distancias.

Ejemplo 3

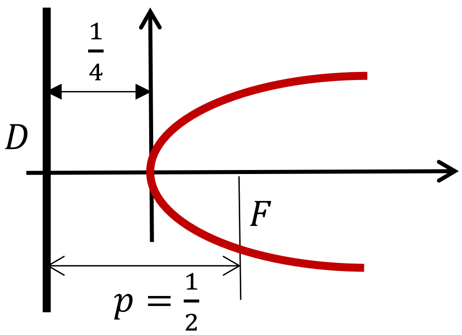
Calcular la ecuación y directriz de la parábola centrada en el origen, de foco el punto F (a,0), con "a" positivo y que pasa por el punto P (9,3)

Si el foco está en el eje X y a la derecha del origen, debemos de saber por teoría que es una parábola horizontal "hacia la derecha" cuya ecuación obedece a la fórmula

$$\boldsymbol{x = +2py^2}$$

Donde ***p*** es la distancia entre el foco y la directriz. Como sabemos un punto por el que pasa, ese punto ha de satisfacer la ecuación. Por lo tanto

$$x = +2py^2 \rightarrow 9 = 2p3^2 \rightarrow \boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$$



De la figura, deducimos que la directriz y el foco quedan definidos por:

$$\boldsymbol{D \equiv x = -\frac{1}{4} \quad F\left(\frac{1}{4}, 0\right)}$$

Los dos siguientes ejemplos son "un poco" más complicados de lo que nos gustaría. Lo hacemos porque lo hemos visto en algún examen.

Más importante que en sí mismo, sí que pensamos que es interesante ejercitar este tipo de cálculos.

Ejemplo 4

Deducir a qué tipo de cónica se refiere la fórmula siguiente, indicando sus características.

$$\mathbf{2y^2 - y + 4x - 8 = 0}$$

De primeras lo que vemos es que, de ser una cónica, se trata de una parábola pues esta cónica es la única que tiene sólo una de las dos variables al cuadrado.

Todo nuestro esfuerzo va a ir dirigido a llegar a una de las cuatro ecuaciones canónicas de la parábola. Pero cuando en la canónica aparezca la variable "x" aquí aparecerá "$\boldsymbol{x \pm a}$". Y lo mismo con la variable "y". Donde en la canónica aparezca "y" aquí aparecerá "$\boldsymbol{y \pm b}$". Entonces, el vértice de la parábola, que en las canónicas es el (0,0), será en nuestro caso el punto (a,b). Sabiendo lo que queremos, la manera es la siguiente:

Lo primero que hacemos es agrupar los términos

$\boldsymbol{2y^2 - y}$ en un binomio al cuadrado:

$$\boldsymbol{2y^2 - y = 2(y + b)^2 + c}$$

Dado que a la izquierda el término $\boldsymbol{y^2}$ tiene como factor al número 2, pondremos delante del paréntesis de la derecha también ese facto, 2

Deduciendo $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{c}$ por igualación:

$$\boldsymbol{2y^2 - y} = 2(y^2 + 2by + b^2) + c = \boldsymbol{2y^2 + 4by + 2b^2 + c}$$

La igualdad entre las expresiones marcadas en negrita nos lleva, igualando los coeficientes de ambos polinomios, a:

$$\begin{cases} -1 = 4b \to b = -\dfrac{1}{4} \\ 0 = 2b^2 + c \to c = -2b^2 = -2 \cdot \dfrac{1}{16} = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$2y^2 - y = 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

Que sustituyendo en la expresión dada nos da

$$2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} + 4x - 8 = 0$$

Ahora, tenemos que hacer que sea de la forma de una de las ecuaciones canónicas, sólo que donde aparezca "x" tiene que aparecer x-a y, donde aparezca "y" tiene que aparecer y-b. Requiere un poco de imaginación y práctica, nada más.

$$2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + 4x - \frac{65}{8} = 0 \to 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + 4\left(x - \frac{65}{8 \cdot 4}\right) = 0 \to$$

$$4\left(x - \frac{65}{8 \cdot 4}\right) = -2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \to x - \frac{65}{32} = -\frac{1}{2}(y - \frac{1}{4})^2$$

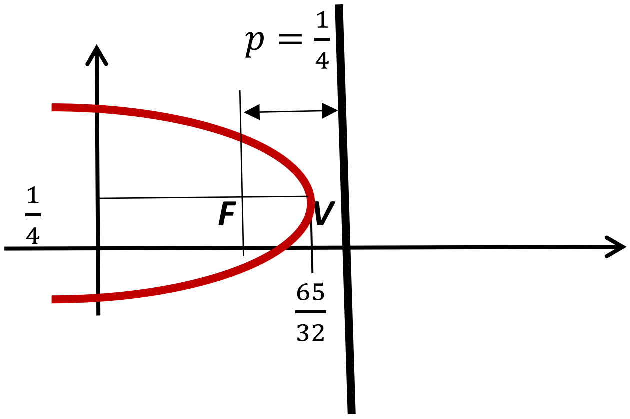
$$\boldsymbol{x - \frac{65}{32} = -\frac{1}{2}(y - \frac{1}{4})^2}$$

Si comparamos con la ecuación canónica

$$\boldsymbol{x = -2py^2}$$

Concluimos que es una parábola horizontal (es la variable "y" la que está al cuadrado), hacia la izquierda por el signo negativo y siendo su vértice el punto

$$(\frac{65}{32}, \frac{1}{4})$$



Como, además

$$2p=\frac{1}{2}\rightarrow p=\frac{1}{4}\rightarrow\frac{p}{2}=\frac{1}{8}\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{F(\frac{65}{32}-\frac{1}{8},\frac{1}{4})}\\ \boldsymbol{D\equiv x=\frac{65}{32}+\frac{1}{8}}\end{cases}$$

Ejemplo 5

Deducir el tipo de cónica y sus características, definida por la ecuación

$$\boldsymbol{2x^2+x-y^2+5y-7=0}$$

Dado que las dos variables aparecen al cuadrado, pero además restadas, se trata de una hipérbola. Como en el ejemplo anterior, y en todos los problemas del mismo tipo, AGRUPAMOS en un binomio al cuadrado LA SUMA FORMADA POR EL CUADRADO DE CADA VARIABLE Y SU TÉRMINO ELEVADO A LA UNO. A este procedimiento se le denomina completar cuadrados.

$$\boldsymbol{2x^2+x=2(x+a)^2+b}\rightarrow 2x^2+x=2x^2+4ax+2a^2+b\rightarrow$$

Fijarse, otra vez, que el binomio al cuadrado lleva delante como factor el número que acompaña a x^2.

Igualando los coeficientes de los polinomios de la igualdad de la derecha

$$\begin{cases} términos\ en\ x: 1 = 4a \rightarrow a = \dfrac{1}{4} \\ términos\ ind.: 0 = 2a^2 + b \rightarrow b = -2a^2 = -2 \cdot \dfrac{1}{16} = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{2x^2 + x = 2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} \quad (1)}$$

Procedemos de la misma manera con la variable y:

$$\boldsymbol{-y^2 + 5y} = -(y+b)^2 + c = \boldsymbol{-y^2 - 2by - b^2 + c} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 5 = -2b \rightarrow b = -\dfrac{5}{2} \\ 0 = -b^2 + c \rightarrow c = b^2 \rightarrow c = \dfrac{25}{4} \end{cases}$$

Quedando entonces:

$$\boldsymbol{-y^2 + 5y = -\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \quad (2)}$$

Sustituyendo las expresiones (1) y (2) en la ecuación dada en el enunciado

$$\boldsymbol{2x^2 + x - y^2 + 5y - 7 = 0}$$

$$2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} - \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} - 7 = 0$$

Pasando los números a la derecha

$$2(x + \frac{1}{4})^2 - \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{8}$$

Multiplicando a toda la ecuación por $\frac{8}{7}$ para llegar a la forma canónica, con un uno a la derecha:

$$\frac{16}{7}(x+\frac{1}{4})^2-\frac{8}{7}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1 \rightarrow$$

$$\frac{\boldsymbol{(x+\frac{1}{4})^2}}{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{16}}}-\frac{\boldsymbol{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}}=\mathbf{1}$$

Expresión que corresponde a la ecuación canónica de una hipérbola horizontal, de centro

$$C(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$$

Y semiejes

$$a^2=\frac{7}{16} \qquad b^2=\frac{7}{8}$$

Datos que nos permitirían dibujarla.