victor loza
ACADEMIA ONLINE

ECUACIONES EXPONENCIALES

Partimos del hecho de que se saben las propiedades y características de la función exponencial de las que se han hablado en lecciones anteriores

En una ecuación exponencial llegaremos siempre, más tarde o más pronto, a otra en donde las bases sean iguales y así poder igualar exponentes y resolver. Si eso no puede ser hay que utilizar logaritmos como veremos en los últimos ejemplos.

Distinguimos tres tipos de ecuaciones según su forma y dificultad

NO APARECEN SUMAS de bases.

En estas, aunque aparentemente las bases sean distintas, si arreglamos veremos que SÍ tenemos una ecuación de bases iguales. Después, bastará con igualar los exponentes:

***Ejemplo 1*:**
Resolver

$$\sqrt[3]{81^{x-2}} = 1$$

SIEMPRE descomponer todos los números en sus factores:

$$81 = 3^4 \rightarrow \sqrt[3]{(3^4)^{x-2}} = 1 \rightarrow \sqrt[3]{3^{4x-8}} = 1 \rightarrow \mathbf{3^{\frac{4x-8}{3}}} = 1 = \mathbf{3^0} \rightarrow$$
$$\frac{4x-8}{3} = 0 \rightarrow 4x - 8 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$$

Ejemplo 2:

Resolver

$$\sqrt[x-2]{\frac{1}{125}25^{x}} = 5$$

Como vemos, aparecen potencias de cinco. Las ponemos entonces como tales:

$$\sqrt[x-2]{5^{-3}(5^2)^x} = 5 \to 5^{\frac{-3}{x-2}} \cdot 5^{2x} = 5 \to$$
$$5^{\frac{-3}{x-2}+2x} = 5^1 \to \boldsymbol{\frac{-3}{x-2} + 2x = 1}$$

Ecuación que se resuelve, aunque creemos que aquí no es necesario ya que es una ecuación de cursos anteriores que hemos de saber solucionar.

APARECEN SUMAS, pero de la misma base

Ejemplo 3.

Resolver

$$\boldsymbol{2^{x+2} + 2^x + 2^{x-2} = 21}$$

Como sabemos, no hay ninguna ley para la suma de dos exponenciales. **Separamos los sumandos de los exponentes** y después, normalmente, se puede despejar una única función exponencial.

$$\boldsymbol{2^x}2^2 + \boldsymbol{2^x} + \boldsymbol{2^x}2^{-2} = 21 \to 2^x(2^2 + 1 + 2^{-2}) = 21 \to$$

$$2^x = \frac{21}{5+\frac{1}{4}} = \frac{84}{21} = 4 \rightarrow 2^x = 4 = 2^2 \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$$

APARECEN SUMAS y, además, aparentemente de distinta base.

Ejemplo 4.

Resolver

$$\boldsymbol{4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0}$$

Como hemos dicho, descomponer los números que se puedan en factores:

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} \rightarrow \boldsymbol{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0\ (1)}$$

La última ecuación tiene las mismas bases, 2, pero el exponente no coincide, como en el caso anterior, para poder despejar la exponencial. Sin embargo, si nos damos cuenta (y deberemos), tenemos:

$$\boldsymbol{2^{2x}} = (\boldsymbol{2^x})^2 \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{2^x = t} \\ \boldsymbol{2^{2x} = t^2} \end{cases} \rightarrow |sustit.en\ (1)| \rightarrow \boldsymbol{t^2 - 5t + 6 = 0} \rightarrow$$

Y resolviendo la ecuación de segundo grado en la variable t:

$$t = 2\ y\ t = 3 \rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \rightarrow \boldsymbol{x = 1} \\ 2^x = 3 \rightarrow \boldsymbol{x = \log_2 3} \end{cases}$$

En la ecuación $\boldsymbol{2^x = 3}$ vemos que no se pueden igualar exponentes porque las bases son distintas, es entonces cuando aplicamos la definición de logaritmo. También, dado que en muchas calculadoras los únicos logaritmos que aparecen son en base diez y en base el número e, podemos hacer:

$$2^x = 3 \rightarrow |sacando\ logaritmos\ en\ base\ 10\ (\log_{10} x = Lx)| \rightarrow$$

$$L2^x = L3 \rightarrow xL2 = L3 \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{L3}{L2}}$$

Donde podemos comprobar la ley del cambio de base:

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

Ya que la fórmula general del cambio de base es

$$\boldsymbol{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

En este último caso es evidente que hay que conocer la función logarítmica. Tenemos una lección dedicada a ella que aconsejamos estudiar. Estos son lo tres tipos de ecuaciones que tenemos que dominar en este curso. Se pueden alargar más, pero insistimos, estos son los tres modelos.