ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para resolver una ecuación trigonométrica el procedimiento general es, primero, que aparezca el mismo ángulo. En un segundo paso haremos que aparezca la misma razón trigonométrica para despejarla y, de ahí, conocer los ángulos que cumplen la ecuación.

Ejemplo 1

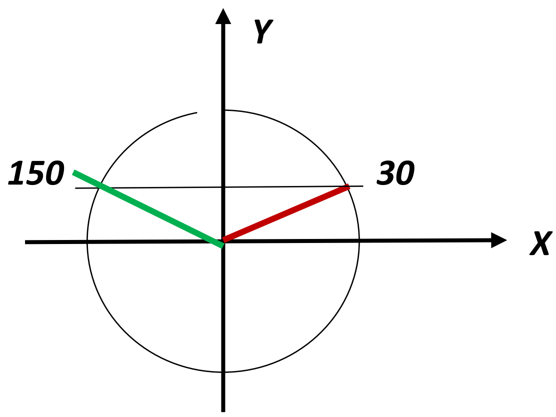
Resolver la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{sen2x = cos60}$$

Esta es de la más sencillas puesto que ya sabemos lo que vale una razón trigonométrica del ángulo incógnita, no importa que sea ***"2x"*** y no ***"x"***, como veremos en la resolución. Al aparecer sólo el ángulo ***"2x"*** no es necesario ponerlo en función de ***"x".*** Despejaremos el ángulo ***"2x"*** y de ahí el ángulo ***"x".***

$$sen2x = cos60 = \frac{1}{2}$$

Y debemos de saber que el ángulo del primer cuadrante cuyo seno vale ½ es el ángulo de ***30*** grados**. Pero ¡ojo! Casi siempre hay dos ángulos con una misma razón trigonométrica**. Recordando la definición de seno en la circunferencia trigonométrica tenemos



En la figura observamos que el otro ángulo que tiene el mismo seno, la misma altura ***"y"***, es al ángulo de ***150*** grados. Y también, todos los que resultan de sumarle a estos dos un número entero de vueltas de circunferencia, pues sus razones trigonométricas serán las mismas.

Por lo tanto, podemos decir:

$$sen2x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = 30 + 360k \rightarrow \boldsymbol{x = 15 + 180k} \\ 2x = 150 + 360k \rightarrow \boldsymbol{x = 75 + 180k} \end{cases}$$

Fijarse que el número de vueltas lo hemos puesto desde el principio, cuando hemos dicho qué ángulos, ***"2x"***, tienen su seno igual a ***1/2.*** Después hemos despejado el ángulo ***"x"***.

Para que quede claro, **la siguiente resolución estaría mal**, o por lo menos no bien, puesto que nos dejaríamos soluciones:

$$sen2x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = 30 \rightarrow \boldsymbol{x = 15} \rightarrow \boldsymbol{x = 15 + 360k} \\ 2x = 150 \rightarrow x = 75 \rightarrow \boldsymbol{x = 75 + 360k} \end{cases}$$

Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{sen^2x - cos^2x = \frac{1}{2}}$$

En este caso tenemos el mismo ángulo, ***"x"***, pero aparecen dos razones trigonométricas, su seno y su coseno. Hacemos entonces aparecer una sólo de ellas, aplicando las identidades fundamentales, en este caso la más importante

$$sen^2x + cos^2x = 1 \rightarrow cos^2x = 1 - sen^2x$$

Y, sustituyendo esta expresión del coseno en función del seno en la ecuación dada:

$$sen^2x - (1 - sen^2x) = \frac{1}{2}$$

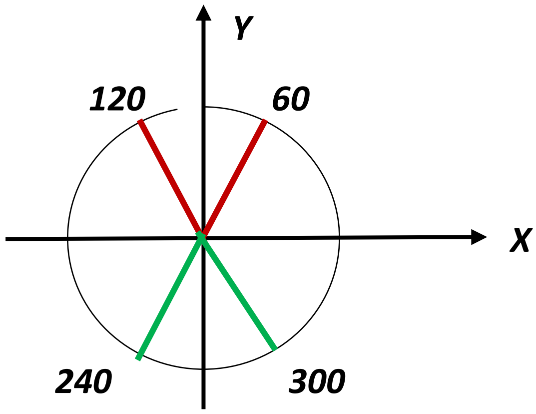
Ya tenemos una ecuación en una incógnita, ***senx.***

$$2sen^2x - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow sen^2x = \frac{3}{4} \rightarrow \boldsymbol{senx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Debemos de recordar que el ángulo del primer cuadrante cuyo seno es

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Es el ángulo de 60. Si dibujamos con esta información la circunferencia goniométrica podemos ver los ángulos de la primera vuelta solución a la ecuación:



Sabiendo que el ángulo de ***60*** tiene el seno positivo dado en la resolución de la ecuación deducimos que el ángulo de ***120*** grados también es solución, puesto que su seno es el mismo. El valor negativo del seno que aparece en la resolución vemos que corresponde a los ángulos de ***240 (60+180)*** y ***300 (120+180).*** Podemos decir entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{senx = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 60 + 360k \\ x = 120 + 360k \end{cases}} \\ \boldsymbol{senx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 240 + 360k \\ x = 300 + 360k \end{cases}} \end{array}\right. \quad \boldsymbol{k \in Z}$$

Por último, dado que los ángulos de 60 y 240 difieren en 180 grados, podemos poner las infinitas soluciones que provienen de esos dos ángulos como:

$$x = 60 + 180k$$

Y lo mismo con las infinitas soluciones que provienen de los ángulos 120 y 300:

$$x = 120 + 180k$$

Agrupando las dos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 60 + 180k} \\ \boldsymbol{x = 120 + 180k} \end{cases} \quad \boldsymbol{k \in Z}$$

Solución más reducida que la dada en negrita un poco más arriba. Por supuesto que las dos son válidas.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación

$$\boldsymbol{senx = sen(45 - x)}$$

Podemos desarrollar el seno de la resta del miembro de la derecha y llegar a una ecuación "normal", donde aparecerá el seno y el coseno de ***"x".*** Pero podemos hacerlo antes si nos damos cuenta de que si dos ángulos tienen el mismo seno tienen que cumplir entre sí dos condiciones no exclusivas:

La primera es que pueden ser ángulos que difieren un número de vueltas enteras, o lo que es lo mismo, el módulo de su resta ha de ser un número entero de vueltas. Esto es general si tienen igual la misma razón trigonométrica.

La segunda condición, sólo válida si tienen el mismo seno como en nuestro caso, es que su suma sea 180 (como 30 y 150…), 180 + 360, … En general 180 + 360k.

Traduciendo estas condiciones, tenemos:

1ª condición

$$senx = sen(45 - x) \rightarrow |x - (45 - x)| = 360k \rightarrow$$

$$|x - (45 - x)| = 360k \rightarrow \begin{cases} x - (45 - x) = 360k \rightarrow 2x = 45 + 360k \\ x - (45 - x) = -360k \rightarrow 2x = 45 - 360k \end{cases}$$

Hemos utilizado el hecho de que, si el módulo de un número es cierto valor positivo, ***"a"*** por ejemplo, ese número puede ser ***"a"*** o ***"-a".***

Las dos soluciones aparentes

$$\begin{cases} 2x = 45 + 360k \\ 2x = 45 - 360k \end{cases}$$

Son en realidad la misma si tenemos en cuenta de el número ***"k"*** es un número entero.

Por lo tanto, la solución que proviene de la primera condición es:

$$2x = 45 + 360k \rightarrow \boldsymbol{x = 22.5 + 180k \;\; k \in Z}$$

2ª condición

$$senx = sen(45 - x) \rightarrow x + 45 - x = 180 + 360k \rightarrow$$

$$45 = 180 + 360k$$

Ecuación claramente sin solución.

Ejemplo 4

Resolver la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{cos2x + senx = 4sen^2x}$$

Como ya hemos comentado, lo primero es hacer que aparezca el mismo ángulo, ***"x"*** en nuestro caso, utilizando las fórmulas que relacionan los distintos ángulos.

$$cos2x + senx = 4sen^2x \rightarrow |cos2x = cos^2x - sen^2x| \rightarrow$$

$$cos^2x - sen^2x + senx = 4sen^2x$$

Ahora estamos en condiciones de que aparezca la misma razón trigonométrica para después despejarla. En nuestro caso, vamos a sustituir

$$cos^2x = 1 - sen^2x$$

Quedando la ecuación:

$$1 - sen^2x - sen^2x + senx = 4sen^2x$$

Donde hemos de ver que se trata de una ecuación de 2º grado en la incógnita seno:

$$-6sen^2x + senx + 1 = 0 \rightarrow senx = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{-12} = \frac{-1 \pm 5}{-12} \rightarrow$$

$$\begin{cases} senx = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 30 + 360k} \\ \boldsymbol{x = 150 + 360k} \end{cases} \\ senx = -\dfrac{1}{3} \rightarrow \boldsymbol{x = arcsen\left(-\frac{1}{3}\right)} \end{cases}$$

Como vemos, cuando el seno (o cualquier razón trigonométrica) despejado no corresponde a un ángulo principal, ***30, 45 o 60*** en el primer cuadrante, la solución se puede dar en la forma en que lo hemos hecho. En nuestro caso el ***arcsen (-1/3).***

Ejemplo 5

Resolver la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{2tgx - 3cotgx - 1 = 0}$$

$$2tgx - 3cotgx - 1 = 0 \rightarrow 2tgx - \frac{3}{tgx} - 1 = 0$$

En este ejemplo, al aparecer una única razón trigonométrica ya, la tangente, la despejamos. No es necesario que la incógnita sea el seno o el coseno, cualquier razón que podamos despejar es válida. Multiplicando a toda la ecuación por ***tgx*** hacemos que desaparezca el denominador:

$$2tg^2x - 3 - tgx = 0 \rightarrow tgx = \frac{3 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-3)}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} tgx = 2 \rightarrow \boldsymbol{x = arctg2} \\ tgx = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \boldsymbol{x = arctg\left(-\frac{1}{2}\right)} \end{cases}$$

Ejemplo 6

Resolver la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{cos8x + cos6x = 2cos210 \cdot cosx}$$

Cuando nos aparezcan la suma de senos o cosenos de ángulos cuya fórmula no tenemos, ángulos como en este caso ***"8x" y "6x",*** **utilizar las fórmulas que nos permiten transformar estas sumas en productos.**

En nuestro caso:

$$cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}$$

$$cos8x + cos6x = 2cos210 \cdot cosx \to 2cos7xcosx = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)cosx \to$$

$$cos7xcosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}cosx$$

Podemos simplificar el factor ***cosx*** que aparece en los dos miembros de la ecuación, pero, entonces, **no nos olvidamos de que una solución de la ecuación es que ese factor que hemos simplificado valga cero** (la ecuación quedaría ***0=0***, algo claramente cierto).

Por lo tanto:

$$cos7xcosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}cosx$$
$$\to \begin{cases} cosx = 0 \to \begin{cases} x = 90 + 360k \\ x = 270 + 360 \end{cases} \to \boldsymbol{x = 90 + 180k} \\ cos7x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \to \begin{cases} 7x = 150 + 360k \to \boldsymbol{x = \frac{150}{7} + \frac{360}{7}\ k} \\ 7x = 210 + 360k \to \boldsymbol{x = \frac{210}{7} + \frac{360}{7}k} \end{cases} \end{cases}$$