PROBLEMAS SOBRE RECTAS

En estos problemas pretendemos practicar la teoría y los ejemplos que se han visto sobre las ecuaciones de la recta en dos dimensiones. Recomendamos, como solemos hacer, dejar primero clara la teoría para después enfrentarse a ellos.

Ejemplo 1

Dadas las dos rectas

$$\boldsymbol{r \equiv 2x + ny + 4 = 0}$$

$$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x = -3 + m \cdot \gamma \\ y = 4 + 3 \cdot \gamma \end{cases}}$$

Calcular el valor de "n" sabiendo que la recta "r" pasa por el punto P (1,-2). Calcular el valor de "m" sabiendo que ambas son:

a) Perpendiculares
b) Paralelas

Si sabemos que la recta ***"r"*** pasa por el punto ***P (1,-2)*** hemos de saber claramente que este punto ha de cumplir su ecuación. Por lo tanto:

$$r \equiv 2x + ny + 4 = 0 \rightarrow P \in r \rightarrow 2(1) + n(-2) + 4 = 0 \rightarrow \boldsymbol{n = 3}$$

Con el valor de ***"n"*** conocido, el valor de ***"m"*** depende de si son paralelas o perpendiculares:

Para aplicar la condición de perpendicularidad o paralelismo entre dos rectas debemos de conocer sus vectores directores. Si las rectas son perpendiculares también lo serán sus vectores directores. Lo mismo ocurre si son paralelas.

a) **Perpendiculares**

$$r \equiv 2x + 3y + 4 = 0 \rightarrow \vec{v}_{\perp} = (2{,}3) \rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_{\parallel}} = (\boldsymbol{-3}, \boldsymbol{2})$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -3 + m\gamma \\ y = 4 + 3\gamma \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_{\parallel}} = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{3})$$

Para que las rectas sean perpendiculares los dos vectores directores, marcados en **"negrita"**, han de ser perpendiculares. Por lo tanto, aplicamos la condición de perpendicularidad entre vectores.

$$(-3)(m) + (2)(3) = 0 \rightarrow \boldsymbol{m} = \boldsymbol{2}$$

b) **Paralelas**

En este caso ambos vectores han de ser paralelos. Aplicamos entonces la condición de paralelismo:

$$\frac{-3}{m} = \frac{2}{3} \rightarrow 2m = -9 \rightarrow \boldsymbol{m} = -\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

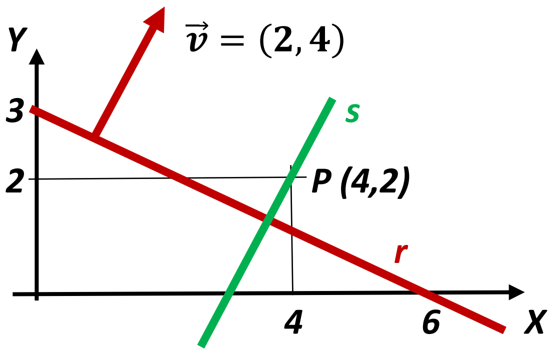
Ejemplo 2

Por el punto P (4,2) se traza una recta, s, perpendicular a la recta

$$\boldsymbol{r \equiv 2x + 4y - 12 = 0}$$

Calcular la ecuación de la recta s, el punto de intersección de las dos rectas y el área del triángulo formada por ambas rectas y el eje de abscisas.

Aunque el dibujo no es necesario hacerlo dibujando los ejes, solamente con las propiedades relativas, en este caso dos rectas perpendiculares, aquí lo vamos a hacer con los ejes:



$$r \equiv 2x + 4y - 12 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to y = 3 \\ y = 0 \to x = 6 \end{cases}$$

Para calcular la recta ***"s"*** conocemos un punto por el que pasa, el punto ***P.*** Nos hace falta conocer su vector director. Recordando la teoría, sabemos que el vector dibujado, el vector ***(2,4)*** **formado por los coeficientes de *"x"* e *"y"* en la ecuación de la recta *r* es un vector perpendicular a la recta *r,*** tal como se ha dibujado. Y, como se ve en la figura, es el vector que indica la dirección de la recta ***s*** pedida. Por lo tanto:

$$s \equiv \begin{cases} P\,(4,2) \\ \vec{v} = (2,4) \end{cases} \to s \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{4} \to \mathbf{4x - 2y - 12 = 0}$$

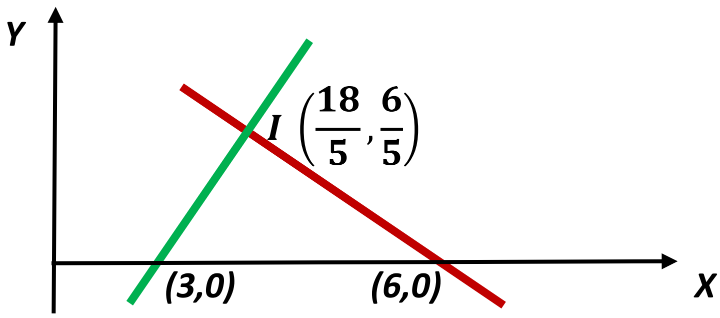
El punto de intersección de ambas rectas se halla, como sabemos, resolviendo el sistema de ecuaciones que forman:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 12 = 0 \\ 4x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son las coordenadas del punto

$$I\left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

Por último, para calcular el área del triángulo formada por las dos rectas y el eje x, si hacemos un dibujo



Elegimos la base del triángulo el segmento del eje de abscisas interceptado por las dos rectas, distancia muy fácil de calcular si calculamos primero el punto de intersección de la recta ***s*** con el eje ***X,*** puesto que la intersección de la recta r ya lo tenemos, es el punto (6,0). Dicho punto de intersección es

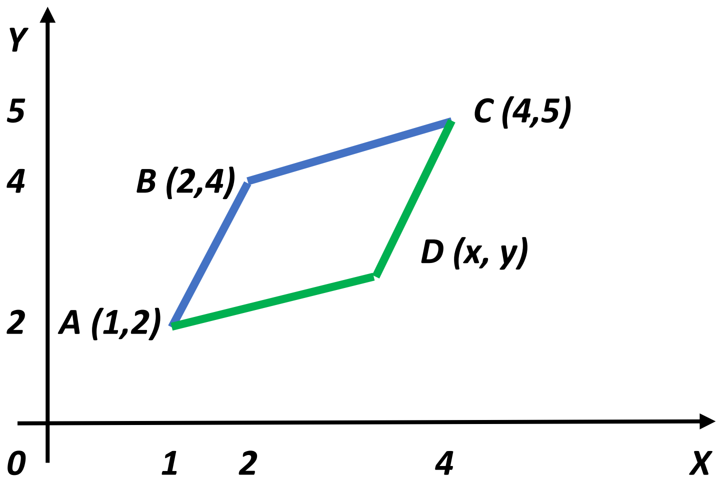
$$\begin{cases} 4x - 2y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{x = 3}$$

La base entonces es la distancia entre el punto ***(3,0)*** y el ***(6,0)***, **tres unidades**. La altura del triángulo es la ordenada del punto de intersección de las dos rectas, ***6/5***. El área es, por lo tanto:

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} b \cdot h} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{6}{5} = \boldsymbol{\frac{9}{5}\, u^2}$$

Ejemplo 3

Los puntos A (1,2), B (2,4) y C (4,5) son tres vértices de un paralelogramo. Hallar el cuarto vértice, D, y el área de dicho paralelogramo.



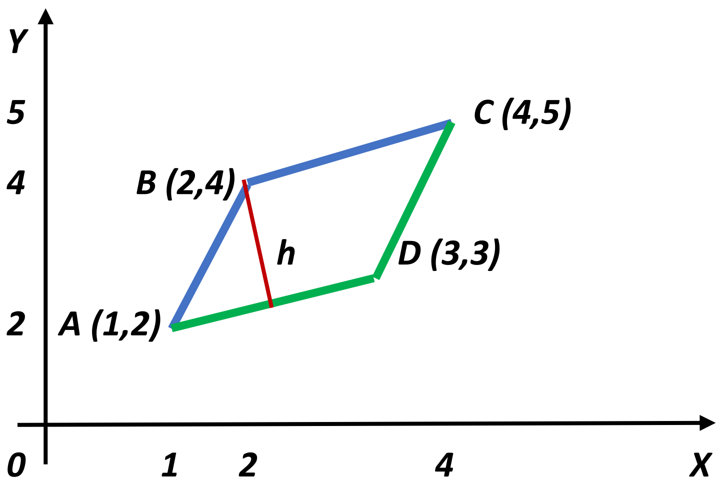
Hemos de ver que, por tratarse de un paralelogramo, los vectores ***AB* y *DC* son iguales.** Lo mismo ocurre con los vectores ***BC* y *AD.***

Cualquiera de las dos condiciones nos sirve para calcular las coordenadas del cuarto vértice, ***C.*** Elegimos la primera opción:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (B - A) = (2 - 1, 4 - 2) = (1,2) \\ \overrightarrow{DC} = (C - D) = (4 - x, 5 - y) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow$$

$$(1,2) = (4 - x, 5 - y) \rightarrow \begin{cases} 1 = 4 - x \rightarrow x = 3 \\ 2 = 5 - y \rightarrow y = 3 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{D = (3,3)}$$

Resultado que concuerda con la figura. Para calcular el área del paralelogramo nos hace falta conocer la longitud de una de sus bases y la altura sobre esa base. Vamos a elegir la base ***AD***



Base:

Es claramente la distancia entre los puntos ***A y D:***

$$\boldsymbol{b} = d(AD) = \left|\overrightarrow{AD}\right| = |(2,1)| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

Altura:

Debemos de ver que la altura, el segmento en "rojo", es **la distancia del punto *B* a la recta *AD.*** Para calcular esa distancia debemos de recordar que tenemos una fórmula para ello. Para utilizarla debemos de calcular la ecuación de la recta ***AD:***

$$\begin{cases} \vec{v}_{\parallel} = \overrightarrow{AD} = (2,1) \\ A = (1,2) \end{cases} \rightarrow \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1} \rightarrow x - 1 = 2y - 4 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{x - 2y + 3 = 0}$$

Ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula que nos da la distancia entre el ***B*** y la recta hallada:

$$\begin{cases} r \equiv x - 2y + 3 = 0 \\ B = (2,4) \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{h} = d(B, r) = \left| \frac{2 - 2 \cdot 4 + 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

Siendo el área entonces:

$$\boldsymbol{A} = b \cdot h = \sqrt{5}\,\frac{3}{\sqrt{5}} = \mathbf{3}\ \boldsymbol{u^2}$$