CÁLCULO Y APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

En los apuntes de teoría ya hemos hablado de la regla de la cadena y hemos visto algunos ejemplos. En esta "lección" seguimos practicando esas ideas sobre derivación.

Ejemplo 1

Derivar

a)

$$y = e^{senx} \cdot Ln(x^3 + 1)$$

b)

$$y = \frac{senx^2}{x^3 + 1}$$

c)

$$y = sen\frac{x}{x + 1}$$

d)

$$y = cosx \cdot Ln(x^2 + 3x)$$

e)

$$y = \frac{e^{x^2} + (x^2 + 3x - 1)^4}{3}$$

a)

$$\boldsymbol{y = e^{senx} \cdot Ln(x^3+1)}$$

Lo primero, como siempre, aplicamos la regla que corresponda a la operación que tengamos, en este caso un producto:

$$y' = (e^{senx})' Ln(x^3+1) + e^{senx}\left(Ln(x^3+1)\right)' =$$

$$e^{senx}(senx)' Ln(x^3+1) + e^{senx}\frac{1}{x^3+1}(x^3+1)' =$$

$$\boldsymbol{e^{senx} cosx \cdot Ln(x^3+1) + e^{senx}\frac{1}{x^3+1} \cdot 3x^2}$$

b)

$$\boldsymbol{y = \frac{senx^2}{x^3+1}}$$

$$y' = \frac{(senx^2)'(x^3+1) - (senx^2)(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{senx^2 \cdot (x^2)'(x^3+1) - senx^2 \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{senx^2 \cdot 2x(x^3+1) - senx^2 \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}}$$

c)

$$\boldsymbol{y = sen\frac{x}{x+1}}$$

$$y' = cos\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' = cos\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{(x+1)^2} cos\left(\frac{x}{x+1}\right)}$$

d)

$$\boldsymbol{y = cosx \cdot Ln(x^2 + 3x)}$$

$$\boldsymbol{y' = -senx \cdot Ln(x^2 + 3x) + cosx \cdot \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3)}$$

e)

$$\boldsymbol{y = \frac{e^{x^2} + (x^2 + 3x - 1)^4}{3}}$$

Recomendamos que cuando el denominador sea un número no derivar como un cociente, aunque evidentemente el resultado sería igual de válido, pero nos costaría más tiempo:

$$y = \frac{1}{3}\left[e^{x^2} + (x^2 + 3x - 1)^4\right] \rightarrow y'$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left[e^{x^2} \cdot 2x + 4(x^2 + 3x - 1)^3 \cdot (2x + 3)\right]}$$

Ejemplo 2

Derivada de la función potencial-exponencial

Calcular la derivada de:

$$\boldsymbol{y = sen^{Lnx}(x^2 + 1)}$$

Tenemos que ver que se trata de una función potencial-exponencial. Para derivarla, como hemos dicho en la teoría y debemos de recordar, hay que **tomar logaritmos en ambos miembros de la igualdad antes de proceder a la derivación**:

$$y = [sen(x^2 + 1)]^{Lnx} \rightarrow Lny = Ln[sen(x^2 + 1)]^{Lnx} \rightarrow$$
$$Lny = Lnx \cdot Ln[sen(x^2 + 1)]$$

Esta expresión es equivalente a la función dada pero ya sin exponentes. Es ahora cuando derivamos el miembro de la izquierda y lo igualamos a la derivada del miembro de la derecha:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x} \cdot Ln[sen(x^2+1)] + Lnx \cdot cos(x^2+1) \cdot 2x$$

Como último paso, despejamos en esta expresión la derivada de la función:

$$y' = \left\{\frac{1}{x} \cdot Ln[sen(x^2+1)] + Lnx \cdot cos(x^2+1) \cdot 2x\right\} \cdot y \rightarrow$$

Y sustituimos el valor de ***"y"*** dado en el enunciado:

$$\boldsymbol{y' = \left\{\frac{1}{x} \cdot Ln[sen(x^2+1)] + Lnx \cdot cos(x^2+1) \cdot 2x\right\} \cdot sen^{Lnx}(x^2+1)}$$

Ejemplo 3

Derivación implícita

Calcular la derivada de la función "y" dada en forma implícita (sin que esté despejada) por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{ysenx + e^x \cdot cosy = 3}$$

Vamos a derivar ambos miembros, teniendo muy claro que ***"y"*** es función de ***"x"***

$$y'senx + ycosx + e^x cosy + e^x(-seny) \cdot y' = 0$$

Y en esta expresión, despejamos la derivada:

$$y'(senx - e^x seny) = -ycosx - e^x cosy \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{-ycosx - e^x cosy}{(senx - e^x seny)}}$$