victor loza
ACADEMIA ONLINE

PROBLEMAS SOBRE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Problema 1

Estudiar la continuidad de la función:

$$\boldsymbol{y=\begin{cases}x^2+5x & si \quad x\le -5\\ x \quad si & -5<x\le 6\\ \dfrac{1}{(x-6)^2} & si \quad x>6\end{cases}}$$

Vamos, en primer lugar, a estudiar los valores de *x=-5 y x=6* pues son los valores de x en donde a la izquierda hay una función y a la derecha otra.

x=-5

Primera condición:

$$\exists \boldsymbol{f(-5)}? \rightarrow f(-5)=(-5)^2+5(-5)=0$$

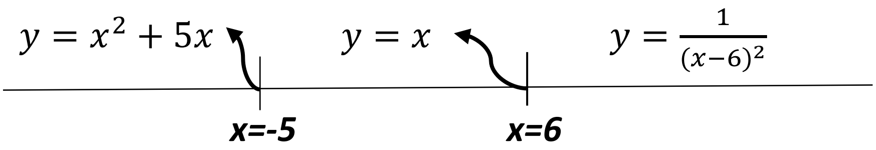
$$f(-5)=0$$

Por lo tanto, se cumple la primera condición.

Segunda condición:

$$\exists \lim_{x\to -5} \boldsymbol{f(x)}$$

Como antes, tenemos que hacer los límites laterales pues a la izquierda de $x=-5$ la función está definida de una manera y a la derecha de otra:

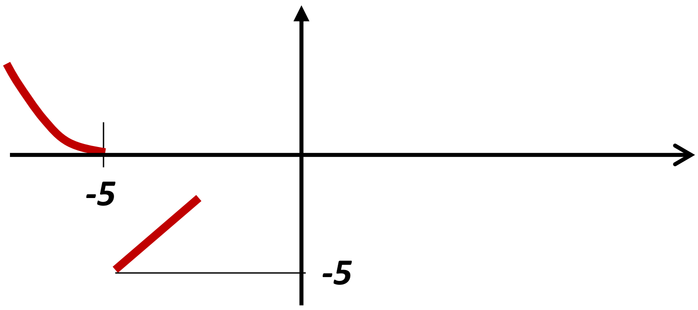


$$\lim_{x \to -5^-} f(x) = \lim_{x \to -5^-} x^2 + 5x = 25 - 25 = 0$$

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = \lim_{x \to -5^+} x = -5$$

Como vemos, **los límites laterales son distintos** y por lo tanto **NO existe el límite**, siendo entonces la función discontinua en $x = -5$

La "pinta" de la gráfica alrededor de $x = -5$ es algo así



La función "salta" de $y = 0$ a $y = -5$ y por eso se dice que esta DISCONTINUIDAD ES DE SALTO FINITO.

Ahora, de la misma manera, estudiamos el valor

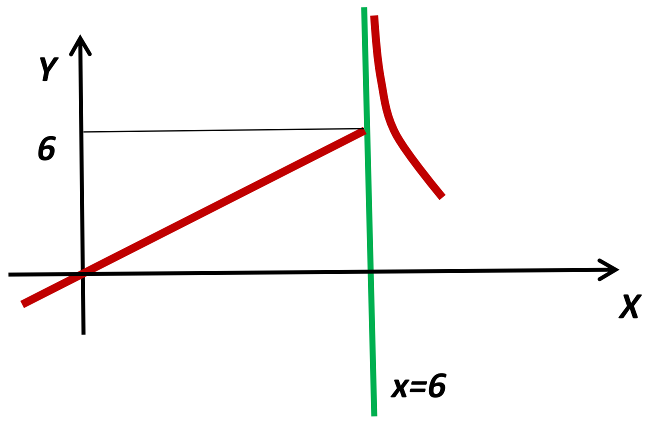
x=6

$$\boldsymbol{f(6) = 6}$$

$$\lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6^-} x = 6$$

$$\lim_{x \to 6^+} f(x) = \lim_{x \to 6^+} \frac{1}{(x-6)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Tampoco existe el límite y la función tampoco es entonces continua en este valor de ***x***. La "pinta" de la gráfica alrededor de $x = 6$ sería



Como vemos, en *x=6,* la función "salta" de *y=6 por la izquierda* a $y \to \infty$. Por eso se dice que esta DISCONTINUIDAD ES DE SALTO INFINITO.

A la recta *x=6*, a la cual la gráfica se va acercando, PERO SIN TOCAR NUNCA, se le llama *ASINTOTA VERTICAL*.

Se dice que $x = k$ es una asíntota vertical si se cumple:

$$\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty$$

Con esto, ya habríamos acabado el estudio de la continuidad de esta función. Ahora vamos más allá porque vamos a dibujarla y hacer un esbozo de ella porque es interesante y se puede preguntar.

ASÍNTOTA HORIZONTAL

Si la gráfica, la altura ***"y"***, se acerca se acerca a algún valor determinado ***k*** cuando la variable ***x*** se acerca a $\pm\infty$ se dice que ***y=k*** es una asíntota horizontal. En nuestro caso:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 + 5x = \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$$

Donde para hacer el límite hemos aplicado la equivalencia entre polinomios cuando ***x*** tiende a infinito. Por este lado, por la izquierda, no existe asíntota horizontal pues como vemos la función no se acerca a una altura determinada.

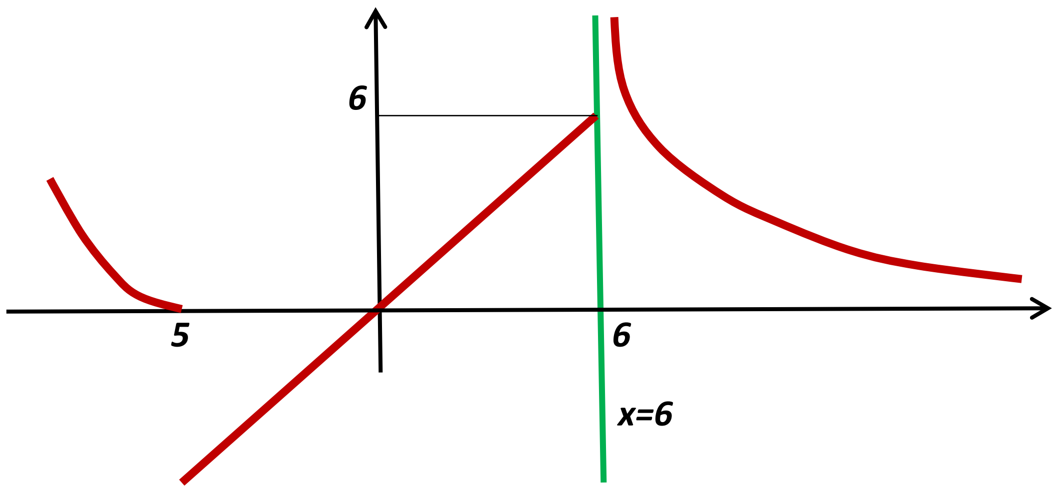
Veamos por la derecha, cuando la variable se acerca a infinito positivo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-6)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Y, en este caso, **SI que la función y se acerca a un valor determinado, *y=0*, y por lo tanto la recta**

$$\boldsymbol{y = 0}$$

Es una asíntota horizontal. Un esbozo de la gráfica sería, agrupando toda la información estudiada, algo así



Problema 2

Estudiar la continuidad de la función y determinar sus asíntotas

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 3}$$

Para estudiar la continuidad de esta función, que no está definida a trozos como la anterior, nos tenemos que fijar en el denominador y qué valores de ***"x"*** lo anulan porque, como sabemos, no se puede dividir entre cero.

$$x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Por lo tanto, vamos a estudiar la continuidad y aplicar la definición para esos valores de ***"x".***

$$\boldsymbol{x = +\sqrt{3}}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2 - 3} = \frac{3}{0} \quad \nexists$$

La función, en ese valor de *"x",* ya no cumple la primera condición de continuidad y por ello ya podemos decir que es discontinua. Pero vamos a estudiar que pasa en sus alrededores haciendo los límites laterales (obligatorio como sabemos cuándo nos queda una expresión de ese tipo, un número dividido entre algo que se acerca a cero)

$$\sqrt{3}^{-} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{3}^{+}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}^{-}} \frac{x^2}{x^2 - 3} = \frac{3}{0^{-}} = -\infty$$

Hemos puesto que la resta tiende a cero, **pero siendo un número muy pequeño NEGATIVO**, **porque al estar a la izquierda de $\sqrt{3}$ su cuadrado no llega a tres y por lo tanto la resta del denominador es negativa**.

Análogamente

$$\lim_{x \to \sqrt{3}^{+}} \frac{x^2}{x^2 - 3} = \frac{3}{0^{+}} = +\infty$$

Porque el denominador tiende a cero, también, pero al estar *"x"* a la derecha de raíz de tres su cuadrado es un poco mayor que tres y por lo tanto la resta es positiva.

Podemos ya decir que la **discontinuidad es de salto infinito** y además que la recta

$$\boldsymbol{x = \sqrt{3}}$$

Como ya hemos comentado en lecciones anteriores, es una asíntota vertical porque se cumple la definición:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to \sqrt{3}} f(x) = \pm\infty}$$

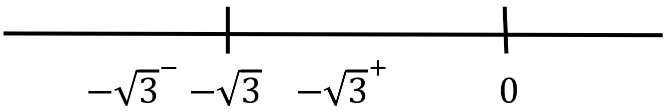
Estudiamos ahora el valor

$$\boldsymbol{x = -\sqrt{3}}$$

Para estudiar la continuidad estudiamos la primera condición, el valor de la función para ese valor de "x"

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^2}{(-\sqrt{3})^2 - 3} = \frac{3}{0} \rightarrow \nexists f(-\sqrt{3})$$

Ya sabemos entonces que es discontinua, pero, como en el caso anterior, estudiamos los límites laterales.



$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\sqrt{3}^{-}} \frac{x^2}{x^2-3} = \frac{3}{0^+}} = +\infty$$

Hemos puesto el "cero" positivo porque a la izquierda de $-\sqrt{3}$ el número es mayor en módulo que $\sqrt{3}$ (por tratarse de números negativos) y entonces al elevarlo al cuadrado el resultado es un poco mayor que tres.

Análogamente

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^{+}} \frac{x^2}{x^2-3} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

Al estar a la derecha de $-\sqrt{3}$ el módulo de esos números es menor que $\sqrt{3}$ y al elevarlo al cuadrado no llega a tres, por lo que la resta es negativa.

Podemos entonces decir que la **discontinuidad es de salto infinito**. Además, la recta

$$\boldsymbol{x = -\sqrt{3}}$$

Es una asíntota vertical por cumplirse que

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\sqrt{3}} f(x)} = \pm\infty$$

Como antes, ya hemos estudiado la continuidad, pero vamos seguir estudiando las asíntotas horizontales para poder hacer un esbozo de la función

Sabemos que, por definición, son rectas horizontales

$$\boldsymbol{y = k}$$

Siendo k el valor del límite de la función cuando "x" tiende a infinito. Veamos:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Pues los polinomios son equivalentes a la "x" de mayor grado cuando esta tiende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Por la misma razón.

Concluimos entonces que la recta

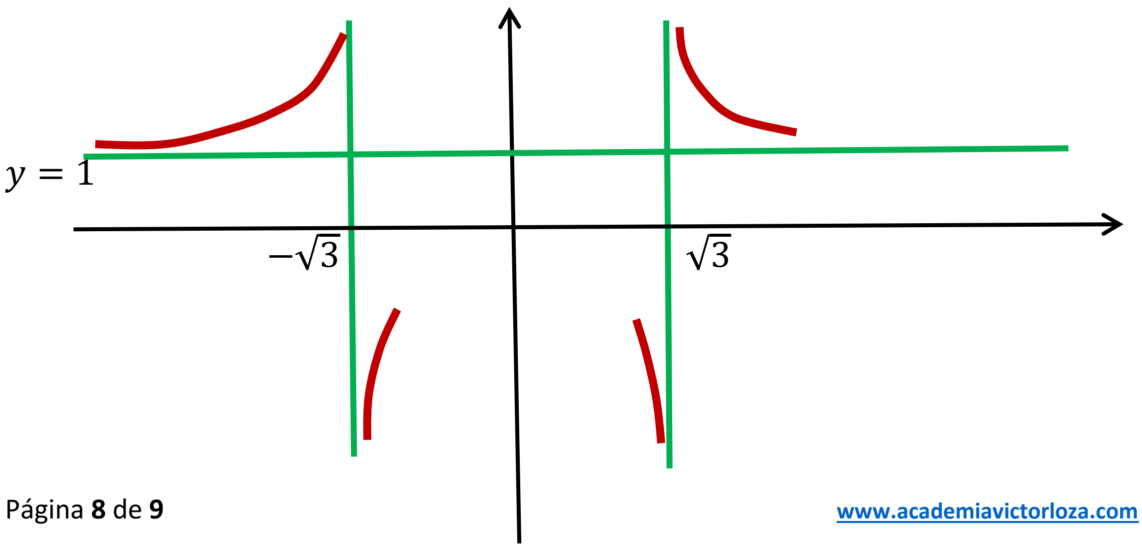
y=1

Es una asíntota horizontal.

Como, además, la función es par, simétrica respecto al eje Y

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2-3} = \frac{x^2}{x^2-3} = f(x)$$

Con la información que tenemos, las asíntotas en verde, la "pinta" de la gráfica sería:



Problema 3

Hallar el valor de "a" para que la siguiente función sea continua en x=1

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} x^2 + ax & x \leq 1 \\ sen\dfrac{\pi x}{2} & \end{cases}}$$

Aplicamos las condiciones de continuidad en ***x=1***

Primera condición

$$f(1) = 1^2 + a \cdot 1 = 1 + a$$

Segunda condición

$$\lim_{x\to 1} f(1) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 + ax = 1 + a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} sen\dfrac{\pi x}{2} = 1 \end{cases}$$

Para que la función sea continua, **ambos límites han de ser iguales. Por lo tanto:**

$$1 + a = 1 \to \boldsymbol{a = 0}$$

Comprobamos para ese valor de "a"

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

Efectivamente, la función es continua.