DERIVADAS

Para seguir y entender los siguientes apuntes es obligatorio saber la definición, el concepto geométrico y las reglas de derivación esenciales. Todo ello está en los capítulos dedicados a ello en “matemáticas de 1º”. En esas lecciones se describe también la REGLA DE LA CADENA, fundamental, como debemos de saber, para derivar. En esta lección vamos a derivar funciones más complicadas que son propias de segundo de bachiller.

Como recordatorio, vamos a resolver algunos ejemplos primero:

Ejemplo 1

Derivar la función

$$\boldsymbol{y = Ln\sqrt[9]{\frac{sen^3x}{e^{cosx}}}}$$

Queremos remarcar con este ejemplo la necesidad de que, cuando nos aparezcan logaritmos, intentemos simplificar lo que se pueda aplicando sus propiedades. Si empezamos a calcular la derivada de esta función sin hacerlo, el camino va a ser mucho más largo y complicado

$$\boldsymbol{y} = Ln\sqrt[9]{\frac{sen^3x}{e^{cosx}}} = Ln\left(\frac{sen^3x}{e^{cosx}}\right)^{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}Ln\left(\frac{sen^3x}{e^{cosx}}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}(Lnsen^3x - Lne^{cosx}) = \frac{1}{9}(3Lnsenx - cosx \cdot Lne) =$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}Lnsenx - \frac{1}{9}cosx}$$

Puesto que ***Lne=1.*** Es ahora cuando derivamos esa función

$$y=\frac{1}{3}Lnsenx-\frac{1}{9}cosx\rightarrow \boldsymbol{y'}=\frac{1}{3}\frac{1}{senx}(senx)'-\frac{1}{9}(-senx)=$$

$$=\boldsymbol{\frac{cosx}{3senx}+\frac{1}{9}senx}$$

Insistimos en, si este ejemplo no está claro, repasar las lecciones de derivadas de 1º de bachiller.

Pasamos a continuación a explicar dos tipos de derivación que, en nuestro nivel, hay que saber, sobre todo la siguiente, la derivación logarítmica.

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Esta forma se utiliza obligatoriamente cuando tenemos una función elevada a otra función. Con un ejemplo creemos que queda suficientemente clara. Vamos a derivar la función

$$\boldsymbol{y=sen^{2x}x=(senx)^{2x}}$$

Este tipo de funciones no vienen en la tabla de derivadas inmediatas (siempre se podría ampliar dicha tabla con una fórmula para ellas, pero esa fórmula es lo suficientemente engorrosa, y la solución sin utilizarla suficientemente simple, que la consideramos innecesaria).

NO es una función potencial x^n ni una función exponencial b^x y por lo tanto no podemos aplicar sus expresiones. **Se llama potencial-exponencial.** Vamos "a sacar" logaritmos en ambos miembros de la igualdad porque así ya no tendremos exponentes:

$$y=sen^{2x}x=(senx)^{2x}\rightarrow lny=ln(senx)^{2x}\rightarrow \boldsymbol{lny=2xln(senx)}$$

En la última expresión subrayada ya no tenemos exponentes y podemos derivar ambos miembros respecto de ***x*** teniendo en cuenta, como no, la regla de la cadena:

$$\frac{1}{y}y'=2lnsenx+2x\frac{1}{senx}cosx$$

Donde al derivar lny se ha tenido en cuenta que la función "y" es una función de x y hemos multiplicado por ello, aplicando la regla de la cadena, por su derivada que claramente es y'. Ahora sólo nos queda despejar y':

$$y' = (2lnsenx + 2x\frac{1}{senx}cosx) \cdot y$$

$$\boldsymbol{y' = (2lnsenx + 2x\frac{1}{senx}cosx) \cdot sen^{2x}x}$$

En donde, para llegar a la última fórmula solución remarcada en "negrita", se ha sustituido ***y*** por su expresión como la función de ***x*** dada al principio.

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Si tenemos la función, denotada por ***y***, sin despejar en función de ***x*** y queremos conocer su derivada, una de las maneras sería despejarla y derivarla como en los casos anteriores, pero esto no es posible algunas veces, como en el caso siguiente:

$$\boldsymbol{xlny + ylnx = 1}$$

Donde al tener la incógnita, función ***y***, dentro de un logaritmo y fuera de él nos resulta imposible agruparla para despejarla. Lo que vamos a hacer es derivar ambos miembros respecto de **la variable *x*** y aplicar la regla de la cadena:

$$(x)'lny + x(lny)' + (y)'lnx + y(lnx)' = (1)' \rightarrow$$

$$\rightarrow lny + x\frac{1}{y} \cdot y' + y'lnx + y\frac{1}{x} = 0$$

Donde al **derivar lny se ha tenido en cuenta que y es una función de x y por lo tanto su derivada $\frac{1}{y}y'$**.

Ahora sólo nos queda despejar y' en la última expresión:

$$x\frac{1}{y}y' + y'lnx = -lny - \frac{y}{x} \rightarrow y'\left(\frac{x}{y} + lnx\right) = -lny - \frac{y}{x} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{-lny - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + lnx}}$$

Quedando en estos casos la derivada como función de "x" y de "y".

En otros casos, aunque se pueda despejar la "y" es más sencillo derivar implícitamente. Veamos un ejemplo donde además recordamos el cálculo de la recta tangente y normal, idea fundamental en nuestro nivel (también se puede consultar en las lecciones de 1º de bachiller dedicadas a ello).

Ejemplo 1

Calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el punto de abscisa $x = 1$ y ordenada positiva.

Calculamos primero el punto:

$Si\ x = 1 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$ Eligiendo el signo positivo marcado por el enunciado. Por lo tanto, estamos en el punto $(1, \sqrt{3})$

Ahora nos hace falta saber lo que vale la derivada en ese punto para poder calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto. Derivamos implícitamente:

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow 2x + 2yy' = 0 \rightarrow \boldsymbol{y' = -\frac{x}{y}}$$

Valiendo la derivada en nuestro punto entonces:

$$y' = -\frac{x}{y} \rightarrow y'(1, \sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = m_{tangente}$$

Teniendo la pendiente y el punto por el que pasa, podemos ya calcular la ecuación de la recta tangente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow \boldsymbol{y - \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1)}$$

LA ECUACIÓN DE LA NORMAL A LA CURVA EN UN PUNTO (perpendicular a la tangente) se calcula teniendo en cuenta que pasa por el mismo punto y su pendiente, por ser perpendicular a la tangente, cumple la siguiente expresión (válida para cualquier par de rectas perpendiculares): $\boldsymbol{m_{tangente} \cdot m_{normal} = -1}$

En nuestro caso anterior de la circunferencia tenemos;

$$m_T \cdot m_N = -1 \rightarrow \left| m_T = \frac{-1}{\sqrt{3}} \right| \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot m_N = -1 \rightarrow \boldsymbol{m_N = \sqrt{3}}$$

El punto por el que pasa es el mismo por el que pasa la tangente $(1, \sqrt{3})$ su ecuación resulta entonces:

$$\boldsymbol{y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - 1)}$$