CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DERIVADA

En la lección anterior hemos visto la definición de derivada de una función en un punto, el concepto geométrico y la definición de función derivada de otra dada. En esta lección vamos a ver cómo podemos calcular la función derivada de otra sin tener que utilizar la definición que, como sabemos, es un límite de difícil cálculo muchas veces. Por suerte, existen unas reglas de derivación que nos simplifican ese cálculo. Dichas reglas, que hay que saber muy bien, se refieren a la derivada de la suma y resta, producto y división de dos funciones. Son las siguientes:

REGLAS DE DERIVACIÓN

$$\boldsymbol{y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)}$$

$$\boldsymbol{y = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

$$\boldsymbol{y = k \cdot f(x) \rightarrow y' = k \cdot f'(x)\ (k = constante)}$$

Para calcular f' y g' hemos de utilizar la tabla de derivadas inmediatas que, como las reglas anteriores, hay que saberse perfectamente o tenerla a mano.

TABLA DE DERIVADAS ELEMENTALES

$$y = k \rightarrow y' = 0$$

$$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1} \quad \forall n \in R$$

$$y = senx \rightarrow y' = cosx$$

$$y = cosx \rightarrow y' = -senx$$

$$y = logx = lnx \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = L_a x \rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{lna}$$

$$y = e^x \rightarrow y' = e^x$$

$$y = a^x \rightarrow y' = a^x \cdot lna$$

$$y = arcsenx \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = arccosx \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = arctgx \rightarrow y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

En esta tabla están todas las funciones elementales que nos van a aparecer. **No tenemos que aprendernos MÁS FÓRMULAS,** pese que en muchos libros aparece una segunda columna más complicada en donde están esas mismas derivadas, pero en donde aparece ***f(x)*** en vez de **“x”. Hemos dicho en varias ocasiones que no son necesarias, ni en física ni en matemáticas, tantas fórmulas (más bien al revés, las fórmulas fundamentales son pocas). Pensamos que mal favor hacen al conocimiento, dado que muchas de ellas provienen de una misma idea que podemos entender perfectamente y que, por lo tanto, las hacen innecesarias.**

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Calcular la derivada de la función

$$\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \to |y = x^n \to y' = nx^{n-1}| \to y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \to$$

$$\boldsymbol{y'} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \to y' = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Podíamos haberla añadido a la tabla de derivadas elementales, pero, como vemos, realmente es una función potencial. De todas formas, como sale muchas veces, **conviene sabérsela de memoria**.

Ejemplo 2

Derivar la función

$$\boldsymbol{y = \sqrt[m]{x}}$$

Se trata de una función potencial y, por lo tanto, ya tenemos en la tabla la regla de su derivada. Sin embargo, como suele salir muchas veces, en muchos textos tiene una fórmula particular que aquí demostramos para quién la quiera utilizar. Nosotros, insistimos, no somos muy amigos de añadir fórmulas secundarias, pero… para gustos están los colores.

$$y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}} = |y = x^n \to y' = nx^{n-1}| = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1} \to$$

$$\boldsymbol{y'} = \frac{1}{m}x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m}x^{-\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m}\frac{1}{x^{\frac{m-1}{m}}} = \boldsymbol{\frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt[m]{x^{m-1}}}}$$

En el caso de que ***m=2*** coincide con la fórmula del ejercicio anterior para la raíz cuadrada.

Ejemplo 3

Calcular la derivada de la función

$$\boldsymbol{y = x^2 senx}$$

$$y = x^2 senx \rightarrow |y = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)| \rightarrow$$

$$y' = (x^2)' senx + x^2 (senx)'$$

$$\boldsymbol{y' = 2xsenx + x^2 cosx}$$

Ejemplo 4

Calcular la derivada de la función

$$\boldsymbol{y = \frac{e^x}{Lnx}}$$

$$y = \frac{e^x}{Lnx} \rightarrow |regla\ cociente| \rightarrow y' = \frac{(e^x)' \cdot Lnx - e^x (Lnx)'}{(Lnx)^2} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{e^x Lnx - e^x \cdot \frac{1}{x}}{Ln^2 x}}$$

Ejemplo 5

Calcular la derivada de la función

$$\boldsymbol{y = Ln\sqrt[7]{x^9}}$$

Recomendamos “fervientemente” aplicar, si se puede, las propiedades de los logaritmos para simplificar la función antes de derivar

$$y = Ln\sqrt[7]{x^9} = Lnx^{\frac{7}{9}} = \frac{7}{9} Lnx \rightarrow \boldsymbol{y'} = \frac{7}{9}(Lnx)' = \boldsymbol{\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{x}}$$

ACADEMIA ONLINE

REGLA DE LA CADENA. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN "NO ELEMENTAL"

Puede pasar, y es muy normal, que la función a derivar no sea elemental, de las que aparecen en la tabla, que sea una función (seno, por ejemplo) pero de otra función (x^2) teniendo entonces $y = senx^2$.

Si hacemos $x^2 = u \ nos\ queda \ y = senu$, cuya derivada sería, **si la variable fuera *u***

$$y' = cosu$$

Pero la variable NO ES u. La regla de la cadena nos dice que a la expresión anterior **TENEMOS QUE MULTIPLICARLA POR LA DERIVADA DE "u". Entonces:**

$$\boldsymbol{y' = cosu \cdot u' = cosx^2 \cdot (x^2)' = cosx^2 \cdot 2x = 2xcosx^2}$$

Resumiendo, como regla llamada de la cadena, diremos:

Cuando una función elemental no es de x sino de una función de x, DERIVAMOS COMO SI LO FUERA (la derivada de $\boldsymbol{y = senx^2}$ $\boldsymbol{sería \ y' = cosx^2}$ ya que la derivada del seno es el coseno) PERO MULTIPLICANDO DESPUÉS POR LA DERIVADA DE ESA FUNCIÓN QUE NO ERA X (en nuestro caso es $\boldsymbol{x^2}$)

Veamos ejemplos de aplicación de esta regla fundamental

Ejemplo 6

Derivar la función

$$\boldsymbol{y = (x^3 + x + 1)^7}$$

$$y' = 7(x^2 + x + 1)^6 \cdot (x^2 + x + 1)' =$$

$$= \boldsymbol{7(x^2 + x + 1)^6(2x + 1)}$$

En donde hemos derivado el paréntesis elevado a la séptima como si fuera de x (7 "cosas" a la sexta) y después hemos multiplicado por la derivada de esa "cosa" o función que no era x sino $x^2 + x + 1$

Ejemplo 7

Derivar la función

$$\boldsymbol{y = Ln\left(\frac{e^x}{x}\right)}$$

$$y' = \left|y = Lnx \rightarrow y' = \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{x}{e^x} \cdot \frac{(e^x)' \cdot x - e^x(x)'}{x^2} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{x}{e^x} \cdot \frac{e^x x - e^x}{x^2}}$$

Hemos derivado el logaritmo como si fuera de x (uno partido de lo que sea) y después hemos multiplicado por la derivada de ese "lo que sea" que en nuestro caso era $\frac{e^x}{x}$.

También, podíamos haber arreglado la función aplicando las propiedades de los logaritmos antes de derivar. Lo hemos hecho así para que quede clara la regla de la cadena. Si hubiéramos arreglado

$$y = Ln\frac{e^x}{x} = Lne^x - Lnx = xLne - Lnx = x - Lnx \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y' = 1 - \frac{1}{x}}$$

Expresión mucha más sencilla que la anterior, con la que coincide si simplificamos la primera opción, sacando factor común y simplificando.

Ejemplo 8

Derivar la función

$$\boldsymbol{y = senx^2}$$

Recordamos aquí el ejemplo que hemos hecho a la hora de explicar la regla de la cadena para que se vea la diferencia con el siguiente ejemplo, ejemplo 9

$$\boldsymbol{y'} = senx^2 \cdot (x^2)' = senx^2 \cdot 2x = \boldsymbol{2xsenx^2}$$

Ejemplo 9

Derivar la función

$$\boldsymbol{y = sen^2x = (senx)^2}$$

$$y' = 2(senx)^1 \cdot (senx)' = \boldsymbol{2senx \cdot cosx}$$

Nótese la diferencia entre $y = senx^2$ que es un seno y como tal lo hemos derivado en el ejemplo anterior e $y = sen^2x$ que es “algo” al cuadrado y como tal lo hemos derivado (dos “algo” a la uno) multiplicando después por la derivada de ese algo que era $senx$.

Recomendamos que cuando una función seno, coseno, logaritmo, funciones llamadas trascendentes, esté elevada a una potencia ponerla como tal función entre paréntesis elevada a esa potencia.

Ejemplo 10

Derivar la función

$$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x^2+1} = (x^2+1)^{1/3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}(x^2+1)^{1/3-1}(x^2+1)' =$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}(x^2+1)^{1/3-1} \cdot 2x} =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \boldsymbol{\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}}$$

Ejemplo 11

Derivar la función

$$\boldsymbol{y = sen^2(x^3+1)}$$

A veces la regla de la cadena hay que aplicarla varias veces:

Para derivar las funciones trascendentes ***senx, Lnx, arctgx***… cuando están elevadas a una potencia aconsejamos, insistimos, ponerla de la siguiente manera (como se ha hecho ya en el ejemplo de $y = sen^2x = (senx)^2$

$$\boldsymbol{y = [sen(x^3+1)]^2}$$

Porque así vemos claramente que se trata de una potencia (al cuadrado) y, por lo tanto:

$$y' = 2[sen(x^3+1)]^1 \cdot (sen(x^3+1))'$$

Y para hacer la derivada del seno de la derecha tenemos que aplicar otra vez la regla de la cadena porque no se trata del seno de x sino de una función de x:

$$(sen(x^3+1))' = \cos(x^3+1) \cdot (x^3+1)' = \cos\,(x^3+1) \cdot (3x^2)$$

Que sustituyendo en y' nos queda:

$$y' = 2sen(x^3+1) \cdot \cos\,(x^3+1) \cdot 3x^2$$

Para que quede claro que el término $3x^2$ no multiplica al ángulo del coseno, se pone mejor al principio, quedando:

$$\boldsymbol{y' = 6x^2\, sen(x^3+1)\cdot \cos\,(x^3+1)}$$