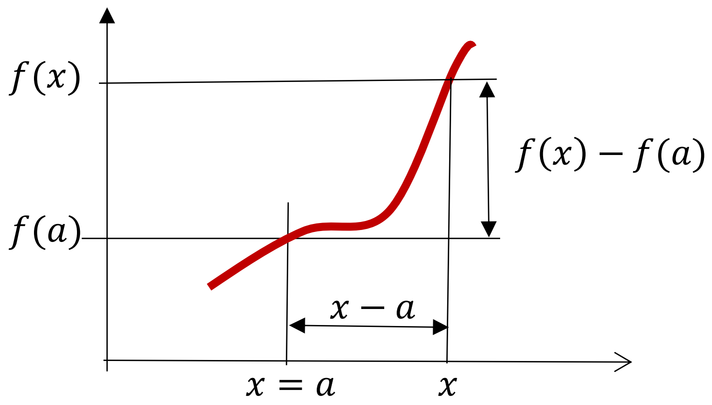
DEFINICIÓN Y CONCEPTO GEOMÉTRICO DE DERIVADA

El concepto de derivada está indefectiblemente unido al de variación y crecimiento y es uno de los instrumentos más importantes y potentes del cálculo.

Tengamos una función cualquiera $y = f(x)$. Esta ley nos permite dibujar la curva con sólo tener paciencia y darle valores a "x" y obtener sucesivamente los puntos por los que pasa. **Sin embargo, nada nos dice de cómo se comporta la función en un punto dado en cuanto a su crecimiento o decrecimiento en él. Eso es lo que nos va a decir la derivada.**

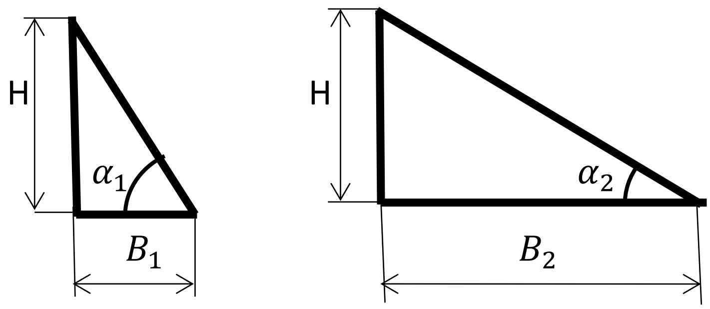
Veamos:

Cojamos un punto cualquiera x=a y pensemos cómo podemos saber si en ese punto la función crece mucho o poco y cuánto:



Para ello cogemos una **"x" al lado de *x=a*** y miramos lo que ha crecido la función que, como se ve en la figura, es $f(x) - f(a)$. **Sin embargo, este crecimiento no es significativo si no tenemos en cuenta el crecimiento horizontal,** el crecimiento de la "x" que, como también se ve en la figura, es $x - a$.

Que el crecimiento en vertical no es significativo si no se tiene en cuenta el crecimiento horizontal, se ve en el ejemplo de estas dos rampas:



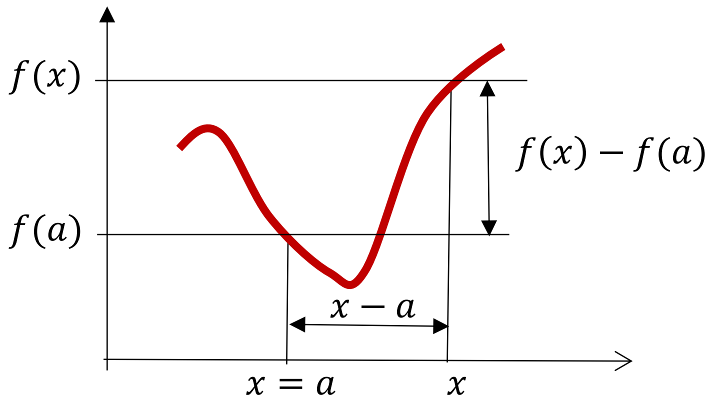
Las dos han crecido lo mismo en vertical pero claramente la rampa de la izquierda está más inclinada, tiene más pendiente. Por eso definimos **la pendiente de una rampa**, de una carretera, como **el cociente entre el crecimiento vertical y el crecimiento horizontal.** A la pendiente de una recta se le suele llamar ***m.*** En nuestras rampas:

$$m_1 = \frac{H}{B_1} = tg\alpha_1 \qquad m_2 = \frac{H}{B_2} = tg\alpha_2$$

Siendo mayor, evidentemente, m_1 ya que su denominador es menor. Recordemos que la pendiente m_1 es la tangente del ángulo α_1 y, análogamente, m_2 coincide con la tangente de α_2. Por ello, también **se define como pendiente de una rampa la tangente del ángulo que esta forma con la horizontal.** Aclarado este asunto y volviendo a la primera figura definimos el siguiente **cociente incremental** como una primera aproximación al cálculo del crecimiento de la curva en x=a:

$$\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Pero todavía, para definir la derivada de la curva en ***x=a***, nos falta un detalle: **para ser lo más precisos posible es necesario que x esté muy cerca de a, que el crecimiento horizontal sea muy pequeño**, pues si no el error puede ser considerable como se ve en la siguiente figura:



Si calculamos el cociente incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

la pendiente de la curva en este caso nos sale positiva, **ya que *f(x)-f(a)* es positivo**, cuando claramente vemos en la gráfica que la curva está decreciendo en ese punto y tendría que salir por ello negativa.

Por lo tanto**, tenemos que coger una "x" lo más próxima posible a *x=a*, una "x" que tienda a *x=a*, definiendo por ello la derivada en x=a de la curva *y=f(x)* como**:

$$\boldsymbol{y'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

FÓRMULA FUNDAMENTAL, DEFINICIÓN DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. En ella, se ha denotado a la derivada en ***x=a*** como $\boldsymbol{y'(a)}$

Veamos un ejemplo:

Sea la curva $y = x^2$. Vamos a calcular la derivada en x=3

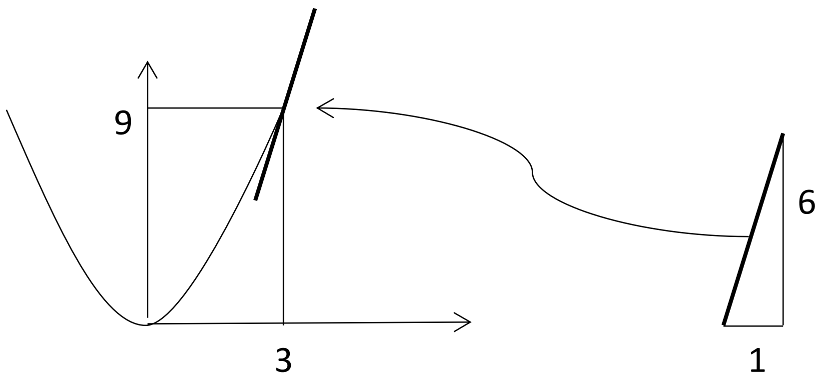
$$\boldsymbol{y'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} =}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{y'(3) = 6}$$

Lo que gráficamente significa



Que la inclinación de la curva en ese punto, su pendiente, o lo que es lo mismo su tangente, toman el valor de 6.

De la tangente a la curva en ese punto ya conocemos el punto *(3,9)* por donde pasa y la inclinación, su pendiente, que vale 6. Por lo tanto, con esos datos, ya podemos calcular la ecuación de la recta tangente.

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA

Dado que la ecuación de una recta que pasa por el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ y tiene pendiente $\boldsymbol{m}$ viene dada por la fórmula:

$$\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

La ecuación de la tangente a una curva en un punto de ella $P(x_0, y_0)$ viene dada por la fórmula

$$\boldsymbol{y - y_0 = y' \cdot (x - x_0)}$$

Dado que la derivada coincide con la pendiente de la tangente

En nuestro caso:

$$\begin{cases} P(3,9) \\ y' = 6 \end{cases} \to \boldsymbol{y - 9 = 6(x - 3) \to y = 6x - 9}$$

Se define la normal a la curva en un punto como la recta que pasa él y es perpendicular a la recta tangente. Teniendo en cuenta que dos rectas perpendiculares cumplen la siguiente relación entre sus pendientes

$$\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 = -1}$$

El producto de las pendientes de la tangente y de la normal ha de dar -1.

$$\boldsymbol{m_{tangente} \cdot m_{normal} = -1}$$

En nuestro caso:

$$6 \cdot m_n = -1 \to m_n = -\frac{1}{6}$$

Como el punto por el que pasa es el mismo que el de la tangente su ecuación queda:

$$\boldsymbol{y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3)}$$

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DERIVADA

Si ahora nos pidieran la derivada a esa curva en otro punto deberíamos hacer lo mismo en ese punto. **Para ahorrar tiempo podemos pensar en calcularla en cualquier valor de $x = x_0$ constante y así deducir la función derivada que, evidentemente dependerá de x_0**

$$\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} x + x_0 = \boldsymbol{2x_0}$$

Lo que nos lleva a decir que **la función derivada de**

$\boldsymbol{y = x^2 \ es \ \ y' = 2x.}$ Si sustituimos el valor de ***x=3*** en esa función, el resultado es ***y'(3)=6***, el mismo valor que hemos obtenido aplicando la definición (como no podía ser de otra manera)

Nuestro trabajo ahora es saber calcular la función derivada de una función dada cualquiera. Para ello, felizmente, hay unas reglas que nos lo permiten sin necesidad de calcular el límite como se ha hecho en el ejemplo anterior. Estas reglas, que siempre hay que recordar o tener a mano, dan lugar a la lección siguiente de cálculo de derivadas.