victor loza
ACADEMIA ONLINE

INTEGRALES IRRACIONALES CUADRÁTICAS VARIAS

Acabamos los tipos fundamentales de irracionales con algún ejemplo más y las integrales "tipo"

$$\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}}}\boldsymbol{dx}$$

En las que siempre haremos el cambio

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1}}}\boldsymbol{dx}=\left|\boldsymbol{x}+\mathbf{2}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}}\rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt\right|$$

$$=\int \frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+4-\frac{4}{t}+1}}dt$$

$$=-\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1+4t^2-4t+t^2}{t^2}}}dt=-\int \frac{t}{\sqrt{5t^2-4t+1}}dt=dt$$

Ya hemos llegado, como vemos, a una integral en la que podemos aplicar la fórmula del método alemán

$$\rightarrow \int \frac{-tdt}{\sqrt{5t^2-4t+1}}=A\sqrt{5t^2-4t+1}+\mu\int \frac{1}{\sqrt{5t^2-4t+1}}dt$$

Se han visto ejemplos similares. **Derivando calculamos las constantes** y la última integral se resuelve así

$$\int \frac{1}{\sqrt{5t^2-4t+1}}dt$$
$$= \left|5t^2-4t+1 = \boldsymbol{5(t+a)^2+b} = 5t^2+5a^2+10at+b\right|$$

Igualando coeficientes de los dos polinomios llegamos a los valores de ***a*** y ***b***

$$\begin{matrix} -4 = 10a \\ 1 = 5a^2+b \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a = -\frac{2}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{matrix} \rightarrow$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5t^2-4t+1}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}}dt = \left|\boldsymbol{t-\frac{2}{5}=z} \rightarrow dt = dz\right| =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5z^2+\frac{1}{5}}}dz = \int \frac{1}{\sqrt{5\left(z^2+\frac{1}{25}\right)}}dz = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{z^2+\frac{1}{25}}}dz =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}Ln\left|z+\sqrt{z^2+\frac{1}{25}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}Ln\left|t-\frac{2}{5}+\sqrt{\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{25}}\right| =$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}Ln\left|\frac{1}{x+2}-\frac{2}{5}+\sqrt{\left(\frac{1}{x+2}-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{25}}\right|+C}$$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx =}$$

Multiplicando numerador y denominador por la raíz:

$$= \int \frac{x^2+2x}{x\sqrt{x^2+2x}}dx = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}}dx =$$

Integral a la que podemos aplicar la fórmula del método alemán:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}}dx = A\sqrt{x^2+2x} + \mu \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}dx =$$

Derivando ambos miembros e igualando coeficientes:

$$= \begin{vmatrix} A = 1 \\ \mu = 1 \end{vmatrix} =$$

$$\sqrt{x^2+2x} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} = |x^2+2x = (x+1)^2 - 1| =$$
$$= \sqrt{x^2+2x} + \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-1}} = |\boldsymbol{x+1=t} \to dx = dt| =$$

$$\sqrt{x^2+2x} + \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} = \sqrt{x^2+2x} + Ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{x^2+2x} + Ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}\right| + C}$$