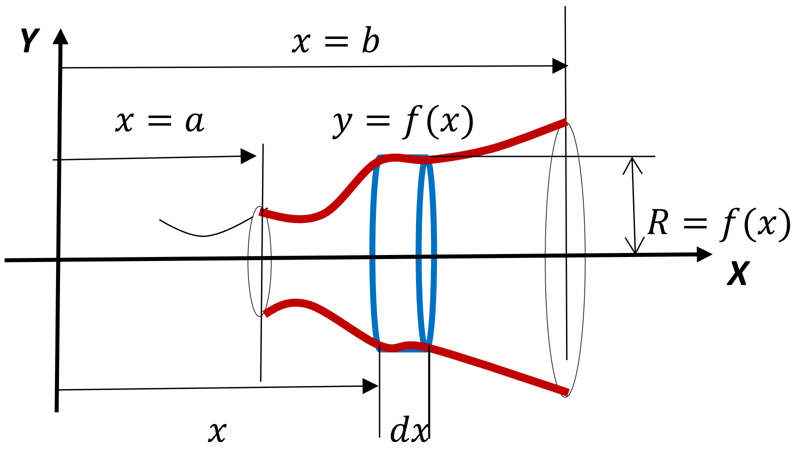
# CÁLCULO DE VOLUMENES DE REVOLUCIÓN

Cuando un trozo de curva cualquiera gira alrededor del eje ***X*** o del eje ***Y***, se forma un volumen que estamos interesados en calcular.

Vemos primero la fórmula que nos da el volumen de revolución cuando una función gira alrededor del eje ***X***

## GIRO ALREDEDOR DEL EJE X. MÉTODO DE LOS DISCOS

Sea la curva $y = f(x)$ de la figura (en rojo) y queremos calcular el volumen del cuerpo que se forma al girar alrededor del eje ***X*** el trozo de ella que va entre ***x=a y x=b***.




Como vemos, el cuerpo no es un prisma recto en el que podamos aplicar las leyes de la geometría básica. Lo que vamos a hacer es partir el cuerpo en "ronchitas" muy finas que, por ser tan finas, podemos aproximar al volumen de un disco (o cilindro muy fino) y después sumar todos esos "volumencitos" por medio de la integral.

**Empezamos cogiendo una "ronchita" o disco genérico (en azul) definido por la variable *x* y calculamos su volumen, que será un diferencial pues su altura también lo es, *dx*:**

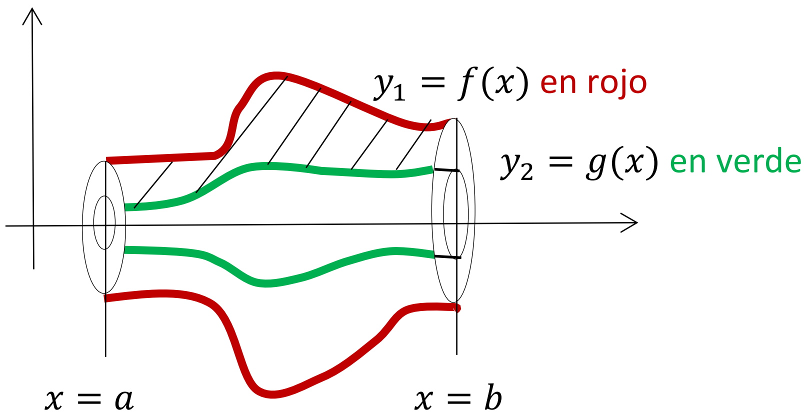
Como observamos en la figura, el disco tiene de altura $dx$ y de radio $R = f(x)$, por lo tanto, su volumen será:

$$V_{cilindro} = \pi R^2 h \rightarrow \boldsymbol{dV = \pi f^2(x) dx}$$

**Ya tenemos la expresión del diferencial de volumen, por lo tanto, el área total será la integral de ese diferencial:**

$$\boldsymbol{V = \int_{x=a}^{x=b} \pi f^2(x) dx}$$

También podemos calcular el volumen del "toroide" formado por dos funciones al girar en torno al eje X, o lo que es lo mismo, el volumen generado por el área rayada al girar en torno al eje X



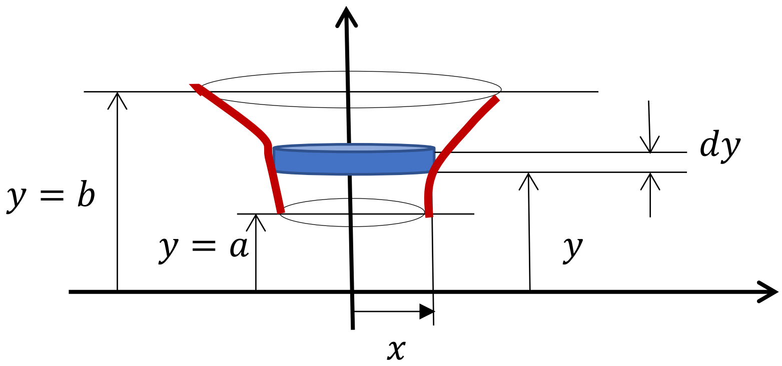

Creemos que es fácil ver que el volumen solicitado se calcula quitándole al volumen generado por la curva superior, en rojo, al girar en torno al eje ***X*** el volumen generado por la curva inferior, en verde, al girar en torno al mismo eje. O lo que es lo mismo, al volumen generado por la "rama" exterior le quitamos el volumen generado por la "rama" interior:

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi f^2(x) dx - \int_{x=a}^{x=b} \pi g^2(x) dx =$$

$$\boldsymbol{V = \int_{x=a}^{x=b} \pi [f_{exterior}^2(x) - g_{interior}^2(x)] dx}$$

## GIRO ALREDEDOR EJE Y. MÉTODO DE DISCOS

Se demuestra de la misma manera que en el apartado anterior:




Como antes, partimos el cuerpo en multitud de disquitos de grosor muy fino ***dy***, y definidos por la altura a la que están, por la variable ***y***. El radio es el valor de ***"x"*** que le corresponde a esa ***"y":***

$Como\ y = f(x) \rightarrow x = \boldsymbol{f^{-1}(y)} = \boldsymbol{R}$

$$dV = \pi R^2 h = \pi(f^{-1}(y))^2 dy \rightarrow V = \int_{y=a}^{y=b} \pi(f^{-1}(y)^2 dy$$

$$\boldsymbol{V = \int_{y=a}^{y=b} \pi(f^{-1}(y)^2 dy = \int_{y=a}^{y=b} \pi x^2 dy}$$

En el caso de que gire el área limitada por dos "ramas", una exterior o más alejada del eje, y otra interior o más cercana al eje, la ley es la misma que en el caso del eje X:

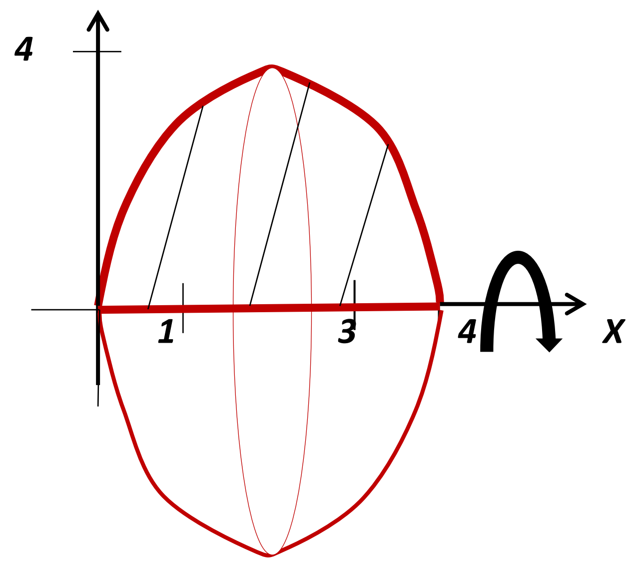
$$\boldsymbol{V = \int_{y=a}^{y=b} \pi\{[x_{ext}(y)]^2 - [x_{int}(y)]^2\} dy}$$

***Ejemplo 1.***

**El área limitada por la curva $y = x(4-x)$ y el eje X gira alrededor del eje X. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.**

Esbozo:

$$y = x(4-x) \rightarrow cortes \begin{cases} eje\ X: x = 0, x = 4 \\ eje\ Y: y = 0 \end{cases}$$




Como vemos en la figura, encima del eje ***X*** sólo hay una rama que, al girar, produce el cuerpo de revolución dibujado. Por lo tanto, aplicando la fórmula de giro alrededor eje ***X*** de una sola rama:

$$\boldsymbol{V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \int_0^4 \pi[x(4-x)]^2 dx}$$

Integral que, una vez desarrollado el cuadrado, se transforma en una polinómica sencilla.