RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Aunque en la lección anterior ya hemos hablado de los triángulos rectángulos, porque complementaban las definiciones de las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica, añadimos aquí sus leyes. En esta lección hablaremos de triángulos cualesquiera. De esta manera tenemos en una única lección los métodos de resolución de cualquier triángulo.

LEYES TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Para los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se cumple, como hemos demostrado en la lección anterior:

$$\textit{Seno de un ángulo} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\textit{Coseno de un ángulo} = \frac{\textit{cateto de al lado o adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\textit{Tangente de un ángulo} = \frac{\textit{cateto de enfrente}}{\textit{cateto adyacente}}$$

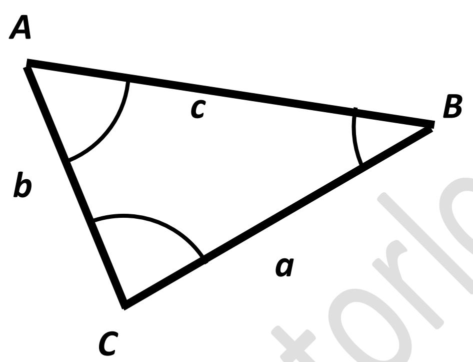
Pasamos a definir las dos leyes que podremos utilizar en cualquier triángulo, incluidos los rectángulos.

LEYES TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

Convenio para nombrar lados y ángulos:

Los catetos se nombran con letras minúsculas. Los ángulos se nombran con letras mayúsculas y **con la misma letra que su cateto opuesto**

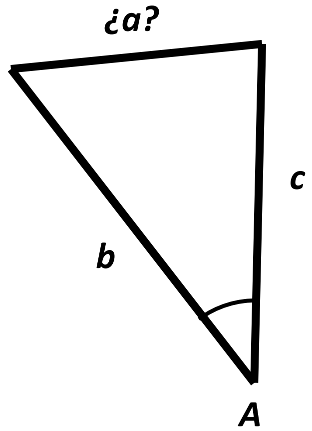
TEOREMA DE LOS SENOS



$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

TEOREMA DE LOS COSENOS

El teorema de los senos anterior engloba muchos casos, pero hay uno principalmente en el que siempre nos aparecen dos incógnitas y no nos es posible despejar, es **cuando conocemos los dos lados de un triángulo y el ángulo que forman. Cuando así ocurra, utilizaremos el TEOREMA DEL COSENO. También lo utilizaremos cuando conozcamos todos los lados y queramos calcular los ángulos.**



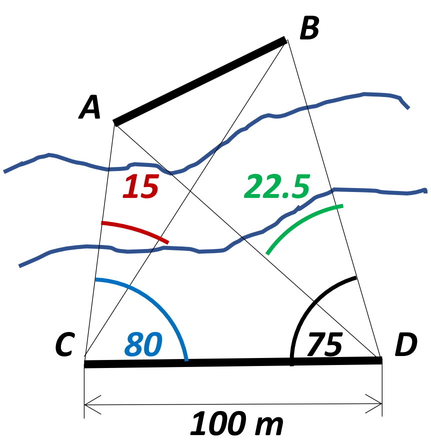
Estos son los datos. El lado que falta por conocer, a, se calcula según la ley que hemos llamado teorema del coseno:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA}$$

En muchos libros hay infinidad de ejemplos. Aquí vamos a hacer sólo uno. Creemos que ejemplifica la forma de trabajar que, por otra parte, no tiene nada de imaginativo, simplemente hacer un buen dibujo y aplicar las fórmulas.

Ejemplo 1

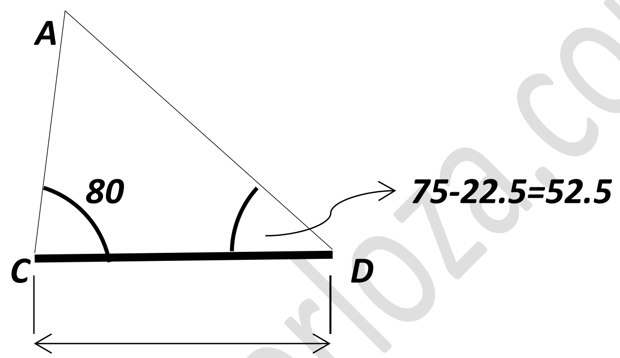
En la figura, queremos calcular la distancia AB inaccesible para nosotros pues está al otro lado de un rio que no podemos cruzar. Para ello, y desde la otra orilla, se toman los datos que se reseñan debajo. Con ellos, calcular la longitud mencionada AB



$$\widehat{ACB} = 15° \;\; \widehat{ACD} = 80°$$

$$\widehat{ADB} = 22,5° \quad \widehat{CDB} = 75°$$

Si nos fijamos en el triángulo ***ABC,*** podemos conocer los lados AC y BC utilizando para ello triángulos que contengan el lado conocido de 100 m. Cuando conozcamos esos lados, bastará aplicar el teorema de los cosenos al triángulo ***ABC.*** Podíamos haber elegido el triángulo ***ABD*** también. Si cogemos el triángulo ACD



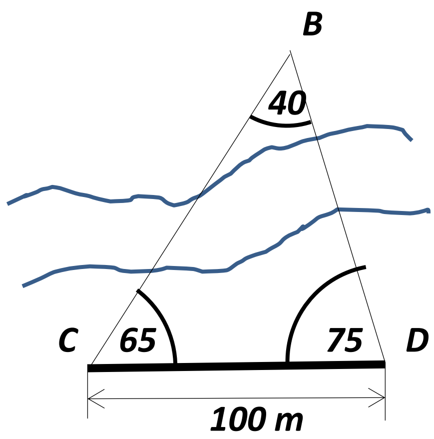
Donde el ángulo $\widehat{CDA}$ es la resta de los ángulos $\widehat{CDB}$ y $\widehat{ADB}$, datos conocidos.

El ángulo que falta se calcula teniendo presente que la suma total es $180°$ $\rightarrow \widehat{CAD} = 180 - (80 + 52,5) = 47,5°$ y ya estamos en condiciones de aplicar el teorema de los senos.

$$\frac{100}{sen47{,}5} = \frac{\overline{AC}}{sen52{,}5} \rightarrow \overline{AC} = \frac{100sen52{,}5}{sen47{,}5} \approx 107{,}6$$

$$\overline{AC} = 107,6$$

De la misma forma tratamos al triángulo BCD para calcular el lado BC



Recordamos los datos:

$$\widehat{ACB} = 15° \;\; \widehat{ACD} = 80°$$

$$\widehat{ADB} = 22{,}5° \quad \widehat{CDB} = 75°$$

El ángulo $\widehat{BCD}$ es la resta de los ángulos $\widehat{ACD} - \widehat{ACB} = 80 - 15 = 65°$

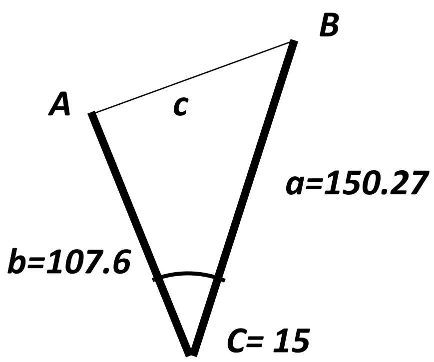
El tercer ángulo, como antes, por resta hasta $180°$, por lo tanto:

$$\widehat{CBD} = 180 - (75 + 65) = 40°$$

Y ya estamos en condiciones aplicar el teorema de los senos para calcular los demás lados, en especial el lado $\overline{CB}$:

$$\frac{\overline{CB}}{sen75} = \frac{100}{sen40} \rightarrow \overline{\boldsymbol{CB}} = \frac{100sen75}{sen40} \approx \mathbf{150,27}$$

Ahora podemos abordar ya el triángulo ACB y resolver el problema.



Típico triángulo donde, como hemos dicho antes, se aplica el teorema del coseno para calcular el lado que nos falta que es, además, la distancia que queríamos calcular:

$$\overline{AB}^2 = 107{,}6^2 + 150{,}27^2 - 2 \cdot 107{,}6 \cdot 150{,}27 cos 15$$

Siendo la solución pedida

$$\boldsymbol{\overline{AB} \approx 54{,}06\, m}$$