victor loza
ACADEMIA ONLINE

CONTINUIDAD

En esta segunda y última lección sobre continuidad vamos a resolver algún ejercicio más y acabamos con un resumen sobre los **distintos tipos de continuidad que han ido apareciendo en los ejemplos.**

Estudiar la continuidad de la función

$$\boldsymbol{y = \frac{x-3}{x^2-5x+6}}$$

Al no estar definida a "trozos" nos fijamos en los valores de "x" que anulan el denominador:

$$x^2-5x+6=0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en estos dos valores de ***"x"***

Continuidad en:

x=2

Primera condición:

$$f(2)=\frac{2-3}{2^2-5\cdot 2+6}=\frac{-1}{0}\ \nexists \boldsymbol{f(2)}$$

No existe ***f (2)***

Segunda condición

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-5x+6}=\left(\frac{-1}{0}\right)=$$

$$=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-3}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-3}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{cases}$$

Por lo tanto, **es discontinua de salto infinito**

Continuidad en:

x=3

Primera condición

$$f(3)=\frac{3-3}{3^2-5\cdot3+6}=\frac{0}{0}\nexists f(2)$$

No existe ***f (3)***

Segunda condición

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-2}=\mathbf{1}$$

Este caso no nos había salido hasta ahora**: No existe la función, pero sí el límite. Se llama discontinuidad evitable. Se puede evitar haciendo**

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{3})=\lim_{x\to3}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{1}$$

Podemos resumir los distintos tipos de discontinuidad como sigue, aunque según textos puede haber variación en el nombre:

$$\textbf{Discont. Evitable}\begin{cases}\exists\lim_{x\to x_0}f(x_0)\ y\ \exists f(x_0)\ pero\ Lim f(x)\neq f(x)\\ \exists\lim_{x\to x_0}f(x_0)\ y\ \nexists f(x_0)\end{cases}$$

$$\textbf{Discont. 1ª Especie}\begin{cases}\lim_{x\to x_0^-}f(x)=l_1\neq\lim_{x\to x_0^+}f(x)=l_2\ \textbf{Salto finito}\\ alguno\ de\ los\ límites=\pm\infty\to\ \textbf{Salto Infinito}\end{cases}$$

Acabamos la lección de continuidad con un problema muy típico:

Problema

Hallar el valor de "a" para que la siguiente función sea continua en x=1

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} x^2 + ax & x \leq 1 \\ sen\dfrac{\pi x}{2} & \end{cases}}$$

Aplicamos las condiciones de continuidad en ***x=1***

Primera condición

$$f(1) = 1^2 + a \cdot 1 = 1 + a$$

Segunda condición

$$\lim_{x \to 1} f(1) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + ax = 1 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} sen\dfrac{\pi x}{2} = 1 \end{cases}$$

Para que la función sea continua, **ambos límites han de ser iguales. Por lo tanto:**

$$1 + a = 1 \to \boldsymbol{a = 0}$$

Comprobamos para ese valor de "a"

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

Efectivamente, la función es continua.