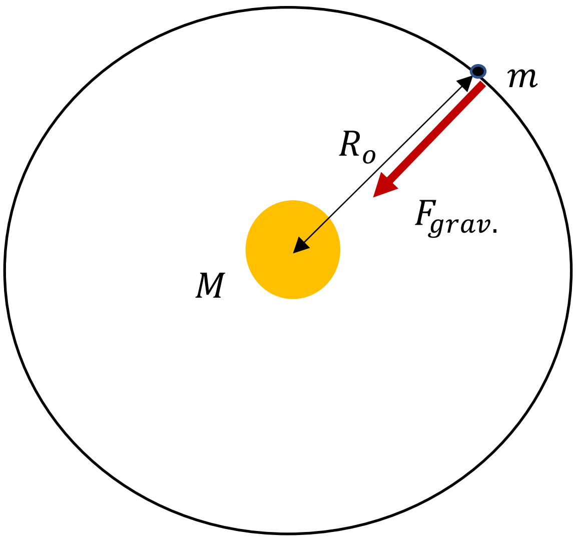
CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO PLANETARIO

ÓRBITAS CIRCULARES

Cuando un satélite está en órbita circular alrededor de un planeta aplicamos, como no podía ser de otra manera, la ley de Newton a un movimiento de rotación. Como vemos en la figura, la atracción producida por el astro central sobre el satélite va en la dirección del eje de giro, eje centrípeto. Por lo tanto, la fuerza gravitatoria es la fuerza centrípeta y será igual a la masa por la aceleración centrípeta.



$$\boldsymbol{F_{centrip\grave{e}ta} = F_{gravitatoria} = ma_{centr\acute{\imath}peta}} \rightarrow$$

$$G\frac{Mm}{R_o^2} = m\frac{v^2}{R_o} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{G\frac{M}{R_o} = v^2 \quad (1)}$$

Como sabemos que G es una constante universal de valor $\boldsymbol{G = 6.67 \cdot 10^{-11}}$

Destacamos que en la ley $\boldsymbol{R_o}$ es el radio de la órbita, no confundir con el radio del planeta o cualquier otro radio.

A partir de esta ley, y utilizando las fórmulas que relacionan la velocidad lineal con la angular y el periodo, llegamos a otras fórmulas a tener en cuenta. Creemos que son fáciles de deducir y, por ello, no es necesario aprendérselas de memoria:

$$\boldsymbol{v = w \cdot R = \frac{2\pi}{T} R} \rightarrow (1) \rightarrow G\frac{M}{R_o} = \frac{4\pi^2}{T^2} R_o^2 \rightarrow$$

$$\frac{R_0^3}{T^2} = \boldsymbol{\frac{GM}{4\pi^2} = K} \rightarrow$$

Y dado que el miembro de la derecha **es el mismo para todos los satélites de un mismo astro**, el sol, por ejemplo, tenemos

$$\boldsymbol{\frac{R_o^3}{T^2} = K \ \ (2)}$$

Ecuación que constituye una de las leyes de Kepler: los periodos al cuadrado son proporcionales a los radios al cubo. Esta ley se cumple para todos los satélites de un astro central, como nuestro sistema planetario, y sirve para comparar los radios y los periodos de ellos. El valor de la constante depende de la masa del astro central como se aprecia en el desarrollo.

Ejemplo 1

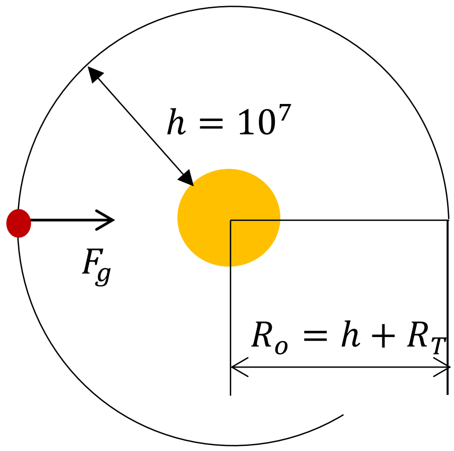
Un satélite gira alrededor de la tierra a una altura sobre su superficie $h = 10^7 m$ en una órbita circular. Calcular:

a) velocidad orbital
b) velocidad angular
c) periodo.
d) Periodo de otro satélite de la tierra cuyo radio orbital es $2 \cdot 10^8 m$

Datos:

Masa de la tierra $\approx 6 \cdot 10^{24}$

Radio de la tierra $\approx 6500\ Km$



a) Velocidad orbital

Vemos claramente que se trata de un movimiento circular con centro en el centro de la tierra. La fuerza de la gravedad sobre el satélite, F_g, es la fuerza que va hacia el centro de giro y, por lo tanto, es la fuerza centrípeta causante del movimiento. Entonces:

$$\boldsymbol{F_g = m_s \cdot a_c} \rightarrow G \frac{M_T \cdot m_s}{R_o^2} = m_s \frac{v^2}{R_o} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{G M_T = v^2 R_o}$$

Sustituyendo

$$GM_T = v^2(10^7 + 6{,}5 \cdot 10^6) \rightarrow v = \sqrt[2]{\frac{GM_T}{1{,}65 \cdot 10^7}}$$

$$v = \sqrt[2]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{1{,}65 \cdot 10^7}} \approx 5000\, {}^{m}/_{s}$$

b) *Velocidad angular*

$$v = \omega R_o \rightarrow \omega = \frac{v}{R_o} \approx \frac{5000}{1{,}65 \cdot 10^7} \approx 3 \cdot 10^{-4}\ {}^{Rd}/_{s}$$

c) *Periodo*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 20734{,}5\ s = 5{,}76\ horas$$

d) *Periodo de otro satélite de radio orbital $R_o = 2 \cdot 10^8$*

Aplicando la fórmula (2)

$$\frac{\boldsymbol{R_o^3}}{\boldsymbol{T^2}} = \boldsymbol{K} \rightarrow \frac{(1{,}65 \cdot 10^7)^3}{5{,}76^2} = \frac{(2 \cdot 10^8)^3}{T^2} \rightarrow$$

$$T = \sqrt{\frac{(2 \cdot 10^8)^3 \cdot 5{,}76^2}{(1{,}65 \cdot 10^7)^3}} \approx 243.076\ horas$$

Remarcamos que al tratarse de una igualdad multiplicativa podemos poner los periodos o las distancias en las unidades que queramos, con tal de que sean las mismas en ambos lados de la igualdad. En nuestro caso, como el periodo del primer satélite lo hemos puesto en horas el periodo del segundo satélite sale también en horas.

Ejemplo 2

Calcular:

a) *la gravedad en la superficie de la tierra*
b) *Altura sobre la superficie terrestre donde la gravedad se reduce a la mitad de la que hay en la superficie.*

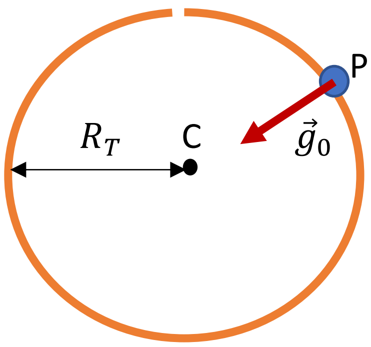
Datos: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$, $M_T \approx 6 \cdot 10^{24} Kg$, $R_T \approx 6500\ Km$

Este problema no se refiere a la cinemática de un movimiento orbital. Sin embargo, es muy típico y lo hacemos al principio de este tema. El concepto ya se ha visto, puesto que la gravedad en un punto, $\vec{g}$, no es más que el valor del campo gravitatorio en ese punto. Cuando se trata de un astro, que claramente no es una masa puntual como en los ejemplos que se han hecho cuando hemos dado la definición de campo gravitatorio, **hay que saber que la dirección y sentido del campo es hacia el centro del planeta**, tanto estemos fuera de él como en su interior. Admitimos, por ahora sin demostración, que **por fuera del astro este se comporta como si fuera una masa puntual situada en su centro.**

Admitiendo lo anterior, resolvemos:

a) *Gravedad en la superficie:*

. Elegimos un punto cualquiera P de la superficie porque, aunque la dirección del vector campo dependa del punto, **no así su módulo que es el mismo en todos los puntos de la superficie** (hacemos la aproximación de que los astros son esferas). Recordamos que, por definición, el campo en ese punto es la fuerza que en él se hace sobre la unidad de masa, 1 Kg. Como estamos en la superficie, denotamos el campo como $\vec{g}_0$



$$|\vec{g}_0| = \boldsymbol{g_o} = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{M_T \cdot 1}}{\boldsymbol{R_T^2}} = 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}}{(6.5 \cdot 10^6)^2} \approx 9.8\ N/Kg$$

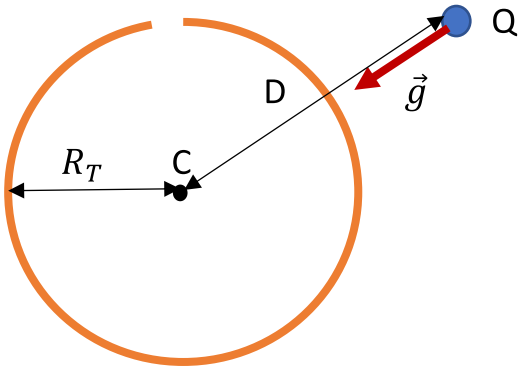
Como sabemos que en la superficie terrestre el módulo de ese vector es $g_0 = 9.8\ N/Kg$ la igualdad

$$g_o = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{M_T \cdot 1}}{\boldsymbol{R_T^2}} = \boldsymbol{9.8}$$

La tendremos en cuenta en algunos problemas en donde no se da como dato el valor de la masa de la tierra, pero sí su radio (y la misma idea se puede aplicar a cualquier astro central, claro, aunque no sea la tierra).

b) *Altura sobre la superficie terrestre donde la gravedad se reduce a la mitad de la que hay en la superficie*

Vamos a calcular la distancia de esos puntos al centro de la tierra, que es la distancia que aparece en las leyes. Cuando nos pregunten la altura sobre la superficie solo habrá que restarle el radio de la tierra.



$$g = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{M_T}}{\boldsymbol{D^2}} = \frac{1}{2}g_0 = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{M_T}}{\boldsymbol{R_T^2}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{D^2} = \frac{1}{2R_T^2} \rightarrow D^2 = 2R_T^2 \rightarrow D = R_T\sqrt{2}$$

Y teniendo la distancia al centro de la tierra, la altura sobre la superficie es

$$\boldsymbol{h} = R_T\sqrt{2} - R_T = \boldsymbol{R_T(\sqrt{2} - 1)}$$