INTEGRALES IRRACIONALES CUADRÁTICAS EN *EL* NUMERADOR

En este capítulo vemos como se resuelven las irracionales cuadráticas cuando la raíz aparece en el numerador

La primera es muy típica y tiene un método propio que hay que saber. Es verdad que se podría hacer como las otras dos, sin cambios trigonométricos que muchas veces son demasiado largos, pero este es el método tradicional:

EN EL NUMERADOR LA PRIMERA $\sqrt{\boldsymbol{a-bx^2}}$

Ejemplo 1

Se trata, como siempre, de quitarnos la raíz de la integral. Como es una resta nos vamos a apoyar en la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\boldsymbol{1-sen^2x=cos^2x}$$

En donde una resta se transforma en un cuadrado perfecto:

$$\int\sqrt{\boldsymbol{7-4x^2}}\boldsymbol{dx}=$$

$$\int\sqrt{7\left(1-\frac{4x^2}{7}\right)}=\sqrt{7}\int\sqrt{1-\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}\right)^2}\,dx=$$

$$==\left|\begin{array}{c}\boldsymbol{\frac{2x}{\sqrt{7}}=sent}\\ \frac{2}{\sqrt{7}}dx=costdt\rightarrow dx=\frac{\sqrt{7}}{2}costdt\end{array}\right|=\sqrt{7}\int\sqrt{1-sen^2t}\frac{\sqrt{7}}{2}costdt$$

$$\frac{7}{2}\int cos^2tdt=\frac{7}{2}\int\frac{1+cos2t}{2}dt=\frac{7}{4}\left(t+\frac{sen2t}{2}\right)$$

Donde la integral del coseno al cuadrado corresponde a una de las cuatro integrales básicas vistas al principio de las integrales trigonométricas. Ahora debemos descambiar la variable:

$$\frac{7}{4}\left(t+\frac{2sentcost}{2}\right)=\left|\begin{array}{c} \frac{2x}{\sqrt{7}}=sent\rightarrow t=arcsen\frac{2x}{\sqrt{7}} \\ sent=\frac{2x}{\sqrt{7}} \\ cost=\sqrt{1-sen^2t}=\sqrt{1-\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}\right)^2} \end{array}\right|$$

$$\boldsymbol{\frac{7}{4}\left(arcsen\frac{2x}{\sqrt{7}}+\frac{2x}{\sqrt{7}}\sqrt{1-\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}\right)^2}\right)+C}$$

Como se ve, todo el mérito consiste en que dentro de la raíz nos aparezca un cuadrado perfecto para que la raíz desaparezca.

EN EL NUMERADOR LA 2ª o LA 3ª

Si en el numerador aparecen las otras dos raíces

$$\sqrt{ax^2\pm b}$$

existen formas similares, utilizar identidades trigonométricas para que esa suma o resta se transforme en un cuadrado perfecto. Sin embargo, creemos que son demasiado engorrosos y particulares. Preferimos utilizar una fórmula, llamada **método alemán**, que además de resolvernos estas nos pueden resolver otras:

Fórmula del método alemán

$$\int \frac{\boldsymbol{P_n(x)}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \mu \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx}$$

Donde tendremos que calcular el polinomio $\boldsymbol{P_{n-1}(x)}$ y el valor del parámetro $\boldsymbol{\mu}$.

Ejemplo

$$\int \sqrt{\boldsymbol{x^2+x+1}}\boldsymbol{dx}$$

Multiplicando numerador y denominador por la raiz llegamos a una integral a la que podemos aplicar el método alemán.

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2+x+1}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+x+1}}} = \boldsymbol{(Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \mu \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx}$$

Ecuación (1)

Donde hemos aplicado la fórmula del método alemán

Esta última ecuación al derivarla es la que nos permitirá conocer las incógnitas $\boldsymbol{A, B}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{\mu}$:

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\sqrt{x^2+x+1} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \mu\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Subiendo el dos del denominador de la raíz al numerador y operando los quebrados de la derecha nos queda una identidad en dos quebrados cuyos denominadores son iguales. Igualaremos entonces los numeradores y esa igualdad nos permitirá deducir las constantes desconocidas

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{A(x^2+x+1)+(Ax+B)\frac{1}{2}(2x+1)+\mu}{\sqrt{x^2+x+1}}\rightarrow$$

$$\boldsymbol{x^2+x+1=A(x^2+x+1)+\frac{1}{2}(Ax+B)(2x+1)+\mu}$$

$$\rightarrow\begin{cases} x=0\rightarrow 1=A+\frac{1}{2}B+\mu \\ x=1\rightarrow 3=3A+\frac{3}{2}(A+B)+\mu \\ x=-1\rightarrow 1=A-\frac{1}{2}(B-A)+\mu \end{cases}$$

Resolviendo el sistema y sustituyendo en la ecuación 1 queda hacer la integral:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\left|x^2+x+1=(x+a)^2+b\rightarrow a=\frac{1}{2};b=\frac{3}{4}\right|$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx=\left|\boldsymbol{x+\frac{1}{2}=t}\rightarrow dx=dt\right|$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}dt=Lg\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right|$$

$$=Lg\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|$$

No olvidar sustituir este resultado en la ecuación (1).