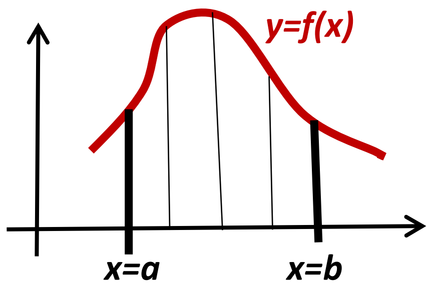
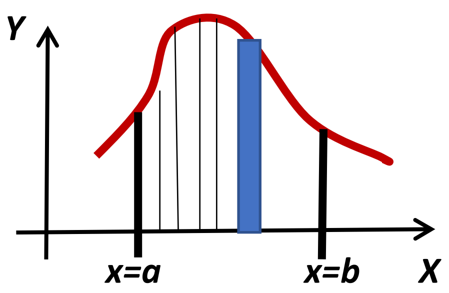
CALCULO DE AREAS

En esta primera lección sobre aplicaciones de las integrales vamos a ver cómo la integral nos puede servir, entre otras cosas, para calcular el área encerrada entre dos curvas. No es nuestra intención dar demostraciones rigurosas que, por otra parte, están en muchos libros y mejor, **sino hacer entender los mecanismos e ideas esenciales que nos permiten aplicar las integrales a un sinfín de problema**s.

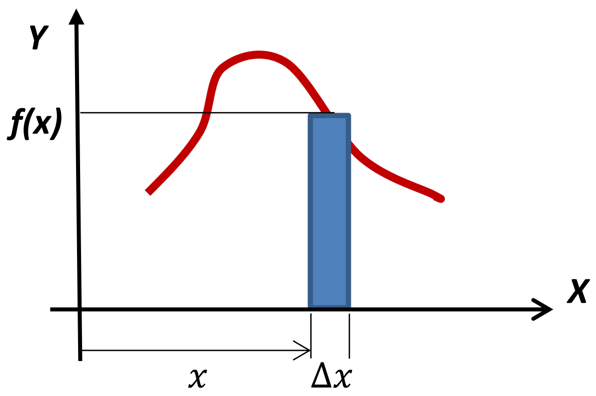
Empezamos por la idea fundamental que es el cálculo del área formada por una función y el eje OX:



Imaginemos que queremos conocer cuánto vale el área rayada. Como hemos dicho, nuestra explicación no va a ser rigurosa, pero, por el contrario, esperamos que sea capaz de clarificar la idea fundamental de la integral: **es una suma de muchísimos sumandos muy pequeños**



Lo que vamos a hacer es dividir el segmento del eje ***X*** que va desde ***x=a*** hasta ***x=b*** en trocitos "muy pequeños" que formarán con la curva casi rectángulos muy finos (decimos casi porque el techo pertenece a la curva y no es recto. El error que cometeremos con ello es muy pequeño, tiende a cero, porque la base de los rectángulos, insistimos, es muy pequeña). Después, sumaremos todas esas pequeñas áreas para calcular el área total.



Estando en un valor de ***x*** cualquiera, si nos vamos un poquito a la derecha una longitud $\Delta \boldsymbol{x}$, el área entre la curva y el eje X habrá aumentado en un rectángulo muy fino cuya base es Δx y cuya altura es $f(x)$. Diremos entonces:

$$\Delta A = f(x)\Delta x$$

Si se cumplen ciertas condiciones, para nosotros siempre, cuando los **incrementos tienden a cero** (que es lo que queremos, no olvidar que la base del rectángulo ha de ser muy pequeña para que el error sea despreciable) los **llamamos *diferenciales*** y la expresión anterior queda:

$$\boldsymbol{dA = f(x)dx}$$

Pues bien, cuando tenemos el diferencial (el trocito) de una función (de una cierta variable x) en nuestro caso el área, y queremos sumar todos esos trocitos diferenciales, empezando en *x=a* y acabando en *x=b,* ESA SUMA ES LA INTEGRAL DEFINIDA de la expresión anterior:

$$\boldsymbol{A = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx}$$

Hallamos conseguido explicarnos o no, esa es la fórmula que nos permite calcular el área de una función con el eje X, entre *x=a* y *x=b.*

Sabemos integrar una función según la lección anterior, pero, ¿cómo se calcula ésta? ¿Qué hacemos con ***x=a* y *x=b*,** llamados límites de integración?

Veamos:

Si la integral indefinida, la que no tiene límites de integración, **es la función *I(x)***

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = I(x)} \rightarrow$$

Entonces, la misma integral definida entre ***x=a*** y ***x=b*** **es la resta de esa función entre los valores que toma para *x=a y x=b***

$$\rightarrow \int_{x=a}^{x=b} \boldsymbol{f(x)dx = I(b) - I(a)}$$

Propiedades principales de la integral definida:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} + \int_b^c \boldsymbol{f(x)dx} = \int_a^c \boldsymbol{f(x)dx}$$

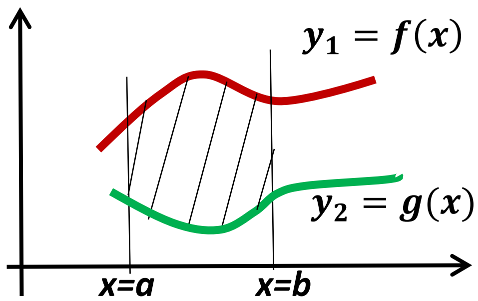
$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = -\int_b^a \boldsymbol{f(x)dx}$$

El hecho de que cuando tenemos la expresión diferencial (trocito) de una función, la integral nos suma todos los trocitos es una idea muy importante que se utiliza en muchos campos, en física, sobre todo. Este método es muy importante porque muchas veces las magnitudes de cualquier tipo no son constantes (en nuestro caso, la altura de los rectangulitos) y lo que hacemos es coger un trocito muy pequeño en donde la magnitud variable tenga un valor constante en ese trocito y después sumamos todos esos trocitos por medio de una integral. (Ver problemas de campo eléctrico en la página de física, por ejemplo).

En el siguiente apartado, generalizamos al cálculo del área formada por dos curvas, no siendo necesario que una de ellas sea el eje OX.

LEY GENERAL DEL ÁREA FORMADA POR DOS FUNCIONES

Si tenemos dos funciones como en la figura, y queremos calcular el área rayada entre ***x=a*** y ***x=b***



El área rayada vendrá dada por la siguiente expresión:

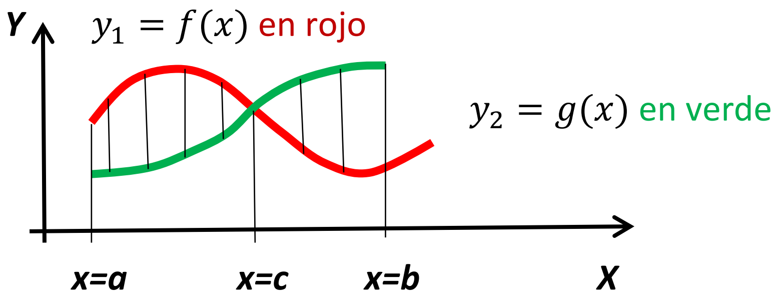
$$A = \int_{x=a}^{x=b} (F_{arriba} - F_{abajo})dx$$

En nuestro caso:

$$\int_{x=a}^{x=b} [f(x) - g(x)]dx$$

ESTA FÓRMULA ES GENERAL, AUNQUE UNA DE LAS CURVAS SEA EL EJE X (ver ejemplo 1). POR LO TANTO, DIBUJAR SIEMPRE UN ESBOZO DE LAS GRÁFICAS PARA SABER CUÁL ESTÁ POR ENCIMA Y CUÁL POR DEBAJO ES CONVENIENTE

Si hay distintas partes, cada una de ellas con su función "techo" y su función "suelo", aplicamos la fórmula anterior a cada una de ellas, como en la figura siguiente:



Queremos calcular el área formada por las dos funciones, sus curvas, $y_1 = f(x)$, en rojo y $y_2 = g(x)$, en verde, entre ***x=a*** y ***x=b***.

Lo primero que hacemos es, como se ha dicho, un esbozo de las gráficas en el intervalo que nos interesa, entre ***x=a y x=b***. En la figura vemos claramente que la función que va por encima, el "techo", no es siempre la misma. Calcularemos entonces el punto de intersección ***x=c*** y aplicaremos la **ley general de área formada entre dos curvas** a cada una de las partes en donde la función de "encima" y la función de "debajo" son las mismas, quedándonos:

$$\boldsymbol{A_{rayada}} = \int_{x=a}^{x=c} [\boldsymbol{f(x) - g(x)}]\boldsymbol{dx} + \int_{x=c}^{x=b} [\boldsymbol{g(x) - f(x)}]\boldsymbol{dx}$$

Insistimos, **en la ley general de área formada por dos curvas,** el eje ***0X, y=0***, es una función igual que las demás (como no podría ser de otra manera). Pensamos que las fórmulas anteriores no es necesario aprendérselas, sino entender la idea y aplicarla a los distintos casos que nos vayan saliendo.

Ejemplo 1

Calcular el área delimitada por

$\boldsymbol{y = x^2 - 5x + 6}$***, el eje X y las* rectas *x=1 y x=5***

Como hemos dicho, lo primero que vamos a hacer es un esbozo de la función y demás datos del problema:

$$y = x^2 - 5x + 6$$

Esta función es una parábola, con los cortes con los ejes es suficiente para dibujarla:

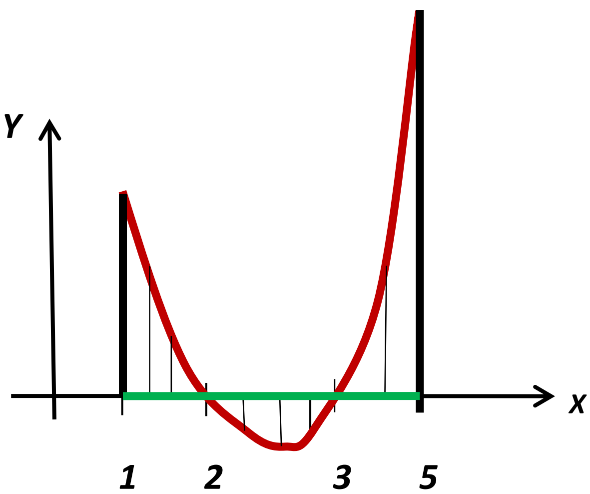
Cortes eje ***X***:

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Corte eje ***Y***:

$$x = 0 \rightarrow y = 6$$

Quedándonos:



El área pedida es la rayada y, como observamos, **hay tres trozos a distinguir**.

El primero va desde *x=1* hasta *x=2* en donde la función por encima, el "techo", es la parábola y la función por debajo, el "suelo", es el eje X (y=0).

El segundo va desde *x=2* hasta *x=3* donde el techo es el eje X y el suelo la parábola.

El tercero y último va desde *x=3* hasta *x=5* donde la función por encima vuelve a ser la parábola y la función por debajo el eje X. Por lo tanto, aplicando la ley general de áreas entre dos curvas, nos queda:

$$A_{rayada} = \int_{x=1}^{x=2} [(x^2 - 5x + 6) - (0)]dx + \int_{x=2}^{x=3} [(0) - (x^2 - 5x + 6)]dx + \int_{x=3}^{x=5} [(x^2 - 5x + 6) - (0)]dx$$

(El "cero" que aparece en ellas, recordamos, es la ecuación del eje X, y=0)

Integrales que creemos no es necesario hacer.

Al utilizar esta ley, integral del "techo" menos el "suelo", nos olvidamos de poner los valores absolutos, que habréis visto en otros sitios. Si una función es negativa y está por debajo del eje X, su integral definida será también negativa y eso no tiene sentido si estamos calculando áreas, por eso se pone valor absoluto. Pero para gustos están los colores… a nosotros nos gusta más así y nos olvidamos del valor absoluto.