TEOREMA DEL TRABAJO

Ahora vamos a redefinir el **teorema de las fuerzas vivas que afirma que el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo se invierte en incrementar su energía cinética**. Aplicamos dicho teorema a una masa que se traslada entre dos puntos, A y B, en un campo gravitatorio. Aplicamos el teorema del trabajo entre ambos puntos. El **trabajo total** los podemos poner como **suma del trabajo de las fuerzas conservativas** (en nuestro caso la gravedad, aunque se puede generalizar a las que haya -eléctricas y elásticas si es el caso-) **y de las fuerzas no conservativas**:

$$\boldsymbol{W_{total}} = \Delta \boldsymbol{E_c} \rightarrow W_{NC} + W_c = \Delta E_c \rightarrow \left| W_C = -\Delta E_p \right| \rightarrow W_{NC} - \Delta E_p = \Delta E_c$$

$$\rightarrow \boldsymbol{W_{NC}} = \Delta E_p + \Delta E_c = \Delta(\boldsymbol{E_p} + \boldsymbol{E_c})$$

Si definimos la suma de energía potencial y energía cinética como energía mecánica, el teorema de las fuerzas vivas se transforma en este **segundo teorema del trabajo**, que nos facilita mucho el problema cuando hay fuerzas conservativas cuyo valor depende de la posición.

$$\boldsymbol{W_{NC}} = \Delta \boldsymbol{E_m}$$

Remarcamos que se han hecho varias demostraciones por rigor y pensamos que tenerlas entendidas es importante. Pero lo que es fundamental, en nuestro nivel, es no olvidarse de las fórmulas **en “negrita”.**

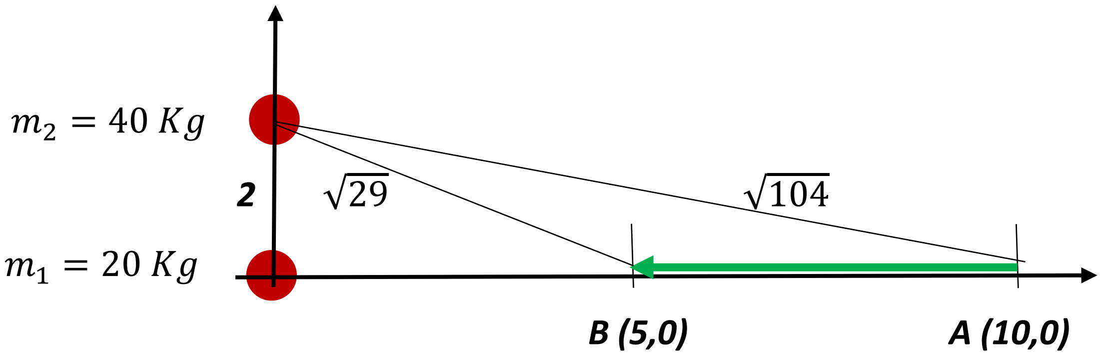
A continuación, un ejemplo en el que aparecen los conceptos estudiados sobre energías y trabajos:

Ejemplo 1

En el punto (0,0) se sitúa una masa m_1 de 20 Kg y en el punto (0,2) otra masa m_2 de 40 Kg. Calcular:

a) El trabajo que hay que hacer para llevar una masa de 2 Kg desde el punto A (10,0) al punto B (5,0).
b) El trabajo hecho por el campo gravitatorio.

Las coordenadas están en el SI



a) El trabajo que hay que hacer para llevar una masa de 2 Kg desde el punto A (10,0) al punto B (5,0).

Cuando nos pregunten que calculemos el trabajo que hay que hacer para trasladar una masa entre dos puntos debemos de tener presentes dos cosas:

La energía cinética en los dos puntos es cero, se trata de trasladar solo.

El trabajo que hay que hacer se refiere al trabajo de las fuerzas no conservativas, a la energía necesaria exterior para efectuar ese desplazamiento.

Cuando un cuerpo se mueva y queramos relacionar dos de sus posiciones con sus velocidades y las fuerzas que actúan sobre él, EL TEOREMA DEL TRABAJO es casi seguro que nos llevará a la solución, o por lo menos nos dará luz sobre ella. Lo aplicamos en nuestro problema a las posiciones A y B

$$\boldsymbol{W_{NC} = \Delta E_m} \rightarrow$$

$$|E_{cin.}(A) = E_{cin.}(B) = 0| \rightarrow$$

$$\boldsymbol{W_{NC} = \Delta E_p}$$

$$\boldsymbol{W_{NC} = \Delta E_p} \quad \begin{cases} W_{NC} = ? \\ E_{pot.inicial} = E_p(A) = 2 \cdot V(A) \\ E_{pot.final} = E_p(B) = 2 \cdot V(B) \end{cases} \quad (1)$$

Por lo que debemos calcular los potenciales en los puntos A y B creados por el sistema de masas m_1 y m_2. Como es algo que ya hemos hecho en la lección de cálculo de potenciales, ponemos sin más explicación los números:

$$\boldsymbol{V(A)} = -G\frac{20}{10} - G\frac{40}{\sqrt{104}} = \boldsymbol{-G\left(2 + \frac{40}{\sqrt{104}}\right)V}$$

$$\boldsymbol{V(B)} = -G\frac{20}{4} - G\frac{40}{\sqrt{29}} = \boldsymbol{-G\left(5 + \frac{40}{\sqrt{29}}\right)V}$$

Sustituyendo en (1)

$$\begin{cases} W_{NC} = ? \\ E_{pot.inicial} = E_p(A) = mV(A) = -2G\left(2 + \frac{40}{\sqrt{104}}\right) \\ E_{pot.final} = E_p(B) = mV(B) = -2G\left(5 + \frac{40}{\sqrt{29}}\right) \end{cases}$$

Y aplicando el teorema:

$$\boldsymbol{W_{NC} = \Delta E_p} \rightarrow$$

$$W_{NC} = E_p(B) - E_p(A) = -2G\left(5 + \frac{40}{\sqrt{29}}\right) + 2G\left(2 + \frac{40}{\sqrt{104}}\right) \rightarrow$$

$$W_{NC} = 2G\left(2 + \frac{40}{\sqrt{104}} - 5 - \frac{40}{\sqrt{29}}\right) = 2G(-3 - \frac{40}{\sqrt{29}} + \frac{40}{\sqrt{104}}) \rightarrow$$

$$\boldsymbol{W_{NC} \approx -6.505G\,J}$$

El trabajo exterior, como el trabajo realizado por el campo, puede salir positivo o negativo. En el caso que nos ocupa, el trabajo que tiene que hacer el exterior ha salido negativo, y, por lo tanto, la fuerza exterior ha ido en contra del desplazamiento. ¿Por qué? Creemos que se ve fácil que las dos masas dadas atraen a la masa de 2 Kg y ésta caería por efecto de la gravedad desde el punto A hasta el punto B espontáneamente. Pero como una condición del problema es que en el punto B debe de estar parada, la fuerza exterior entonces ha tenido que ir “frenando” para que esto ocurra. Sin ninguna fuerza exterior, la masa de 2 Kg, como decimos, caería y llegaría al punto B con una velocidad distinta de cero. Podemos decir, resumiendo, que si el trabajo exterior para trasladar una masa sale negativo es que el campo va a favor de esa traslación. Por el contrario, si el trabajo exterior sale positivo es que el campo se opone a esa traslación.

b) El trabajo hecho por el campo gravitatorio.

Como ya se ha visto, el trabajo hecho por el campo viene dado por

$$W_C = -\Delta E_p$$

Y, acabamos de ver que, por tratarse de una traslación donde las energías cinéticas inicial y final son cero, se cumple que

$$W_{NC} = \Delta E_p$$

Por lo tanto, no hace falta hacer más cálculos, ya que, como vemos, son contrarios. Además, por el primer teorema de la energía, **el trabajo total** ha de ser cero porque no ha habido variación de energía cinética.

$$\boldsymbol{W_C} = -W_{NC} = \boldsymbol{6.505G\ J}$$

Ejemplo 2

Utilizando los mismos datos del problema anterior, calcular la velocidad con la que llegaría la masa m= 2Kg al punto B si se deja “caer” libremente desde el punto A en reposo.

Se han cogido los mismos datos porque aprovechamos que ya tenemos calculados los potenciales en los puntos A y B. Como ya se ha dicho, para relacionar dos posiciones y sus velocidades, utilizamos el teorema del trabajo:

$$\boldsymbol{W_{NC} = E_m(B) - E_m(A)}$$

Calculamos cada uno de los tres sumandos por separado para al final sustituir en la expresión y despejar.

Trabajo de las fuerzas NO conservativas: la única fuerza que actúa sobre la masa es la fuerza gravitatoria ("se deja caer libremente"). Entonces no actúa ninguna fuerza NO conservativa, por lo que

$$\boldsymbol{W_{NC} = 0}$$

Energías:

$$E_m(B) = E_p + E_c = mV(B) + \frac{1}{2}mv^2(B) \rightarrow$$

$$\boldsymbol{E_m(B) = -2G\left(5 + \frac{40}{\sqrt{29}}\right) + \frac{1}{2}2v^2(B)}$$

$$\boldsymbol{E_m(A)} = E_p + E_c = mV(A) = \boldsymbol{-2G\left(2 + \frac{40}{\sqrt{104}}\right)}$$

Sustituyendo en el teorema:

$$\boldsymbol{W_{NC} = E_m(B) - E_m(A)} \rightarrow$$

$$0 = -2G\left(5 + \frac{40}{\sqrt{29}}\right) + \frac{1}{2}2v^2(b) + 2G\left(2 + \frac{40}{\sqrt{104}}\right) \rightarrow$$

De donde despejamos la velocidad en ***B***:

$$2G\left(5 + \frac{40}{\sqrt{29}}\right) - 2G\left(2 + \frac{40}{\sqrt{104}}\right) = v^2(B) \rightarrow$$

$$v^2(B) = 2G\left(3 + \frac{40}{\sqrt{29}} - \frac{40}{\sqrt{104}}\right) \rightarrow$$

$$\boldsymbol{v(B) \approx 2.946 \cdot 10^{-5} m/s}$$