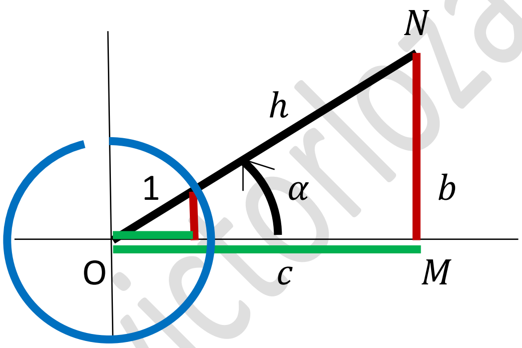
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Entendidas ya las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo, vamos a ver en esta lección su aplicación a la resolución de triángulos rectángulos. En esa resolución vamos a utilizar tres fórmulas fundamentalmente que, por su sencillez, pasamos a demostrar. En la figura tenemos un triángulo rectángulo cualquiera OMN, de catetos c y b e hipotenusa h. Queremos llegar a una relación entre esas tres magnitudes y el ángulo α del triángulo.



La circunferencia que se ha remarcado en azul es la circunferencia goniométrica de radio unidad. Aplicando las simples leyes de semejanza entre el triángulo grande OMN y el pequeño de **cateto rojo, $sen\alpha$**, y **verde, $cos\beta$,** y de hipotenusa el radio unidad, podemos decir:

$$\frac{b}{h} = \frac{cateto\ rojo}{1} = \frac{sen\alpha}{1} \rightarrow sen\alpha = \frac{b}{h}$$

EL SENO DE UN ÁNGULO ES IGUAL AL COCIENTE DE SU CATETO OPUESTO ENTRE LA HIPOTENUSA

Recomendamos recordar esta expresión y no las que, diciendo lo mismo, se escriben con letras.

Estamos convencidos de que lo que hemos remarcado en negrita son IDEAS, independientemente de qué letra le asignemos al cateto o al ángulo. Por ello, creemos que, además de ser más fáciles de recordar, es muy difícil que nos planteen dudas en algún momento. Utilizando letras siempre tendremos que acordarnos de, por ejemplo, ¿qué cateto es el cateto a? ¿o el ángulo A?

Aplicando la semejanza entre los mismos triángulos:

$$\frac{c}{h} = \frac{cateto\ verde}{1} = \frac{cos\alpha}{1} \to cos\alpha = \frac{c}{h}$$

O lo que es lo mismo:

EL COSENO DE UN ÁNGULO ES IGUAL AL COCIENTE DEL CATETO QUE TIENE A SU LADO, CONTIGÜO O ADYACENTE, ENTRE LA HIPOTENUSA

Por último:

$$\frac{b}{c} = \frac{cateto\ verde}{cateto\ rojo} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha$$

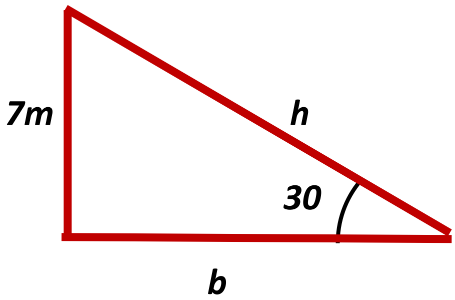
O lo que es lo mismo:

LA TANGENTE DE UN ÁNGULO ES IGUAL AL COCIENTE DEL CATETO QUE TIENE ENFRENTE SUYO ENTRE EL CATETO QUE TIENE A SU LADO.

Como las razones trigonométricas no son incógnitas pues las conocemos utilizando la calculadora, este es un método fundamental para resolver triángulos rectángulos. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Dado el triángulo de la figura, calcular su hipotenusa y el cateto b.



Se trata de calcular h y b:

Aplicando las relaciones anteriores:

$$\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{h}} = sen30 = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \rightarrow \boldsymbol{h = 14\ m}$$

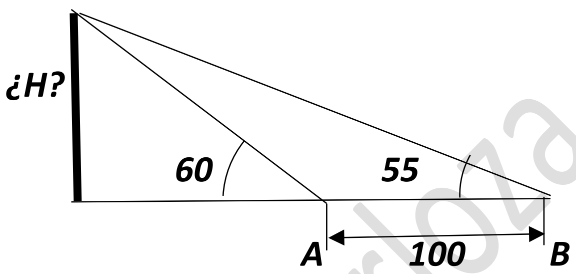
Una vez conocida h, se puede aplicar Pitágoras para calcular el otro. Pero también:

$$cos30 = \frac{b}{h} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{14} \rightarrow \boldsymbol{b = 7\sqrt{3}\ m}$$

Ejemplo 2

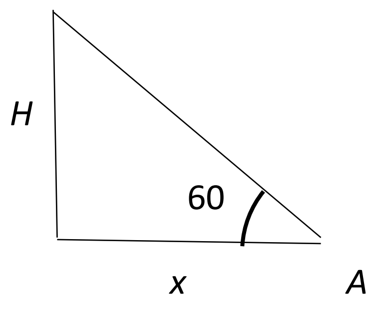
Desde un punto arbitrario en el suelo A se mira hacia la cúspide de un edificio de altura desconocida obteniendo un ángulo de elevación de 60 grados. Alejándonos 100 m se observa el mismo punto bajo un ángulo de elevación de 55 grados. Calcular la altura H de la torre.

Lo normal es que nos den un dibujo, aunque si el enunciado está bien redactado no debe de haber problema a la hora de dibujarlo.



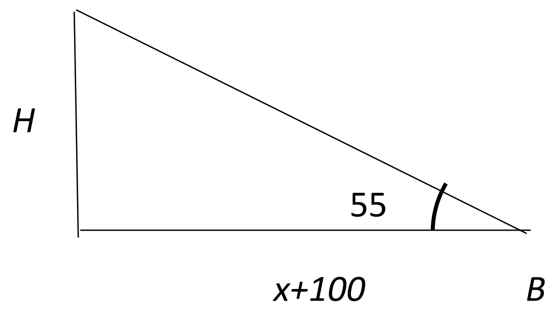
Es muy típico que aparezcan dos triángulos rectángulos, vamos a estudiar cada uno de ellos y, sin miedo, a lo que no conozcamos le ponemos nombre. Como las hipotenusas no las conocemos y, además, tampoco nos interesa conocerlas en principio, nombramos con incógnitas a los catetos y utilizamos la ley en la que aparece la tangente.

Triángulo pequeño:



$$tg60 = \frac{H}{x}$$

Triángulo grande:



$$tg55 = \frac{H}{x+100}$$

Como vemos, tenemos dos triángulos y dos ecuaciones con dos incógnitas que provienen de cada uno de los triángulos.

$$\boldsymbol{\frac{H}{x} = tg60}$$

$$\boldsymbol{\frac{H}{x+100} = tg55}$$

Como las tangentes de 60 y 55 las conocemos por la calculadora, tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas que no resolvemos porque pensamos que a estas alturas no es necesario.