victor loza
ACADEMIA ONLINE

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función $y = f(x)$ es continúa en $x = x_0$ si cumple las siguientes tres condiciones:

Primera: existe $f(x_0)$

$$\exists f(x_0)$$

Segunda: existe el límite cuando x tiende a x_0

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \to \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Tercera: ambas cosas son iguales:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Para estudiar la continuidad de una función en un punto lo único que tenemos que hacer es deducir si se cumplen o no las tres condiciones. Gráficamente, podemos decir que si una función es continua en un punto la podremos dibujar al pasar por él sin "levantar el lapicero".

Veamos varios ejemplos.

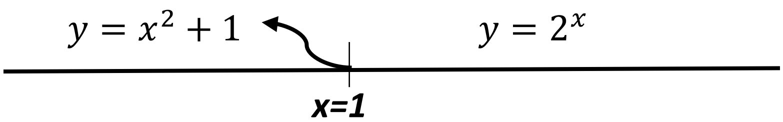
Ejemplo 1

Sea la función definida a trozos

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x \leq 1 \\ 2^x & si \quad x > 1 \end{cases}}$$

Determinar si es continua en $\boldsymbol{x = 1}$

Antes de ***x=1,*** la función es un polinomio, función continua para todo valor de ***x***. Después de ***x=1*** la función es una exponencial también continua para todo valor de ***x***. El problema lo tenemos en ***x=1*** **pues a su izquierda la función está definida de una manera y a su derecha de otra y puede pasar que las gráficas no se unan de la manera "adecuada",** que en ese punto no se cumplan las tres condiciones. Para poder deducir si es continua en $x = 1$ aplicamos la definición y nos ayudamos de la siguiente gráfica. La flecha que parte de ***x=1*** significa que la **función SÍ está definida en él por medio del polinomio, según el enunciado.**



Primera condición:

$$\exists \boldsymbol{f}(\mathbf{1})?$$

En el enunciado, y como se ha reflejado en la figura, Sí está definida la función en ***x=1*** por medio del polinomio

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

Segunda condición:

$$\exists \lim_{x \to 1} f(x)?$$

Como a la izquierda de ***x=1*** la función está definida de una manera y a la derecha de otra, tenemos que calcular los límites laterales:

Por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

Por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2^x = 2^1 = 2$$

Al ser ambos límites iguales podemos decir que el límite existe

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Viendo los resultados comprobamos que se **cumple también la tercera condición**:

$$\boldsymbol{f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2}$$

Por lo tanto, ya podemos decir que esta función es continua en *x=1*. También, como ya se ha dicho, en todos los demás valores de x.

Ejemplo 2

Estudiar la continuidad de la función:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} x^2 + 5x \quad si \quad x \leq -5 \\ x \quad si \quad -5 < x \leq 6 \\ \dfrac{1}{(x-6)^2} \quad si \quad x > 6 \end{cases}}$$

Vamos, en primer lugar, a estudiar los valores de *x=-5 y x=6* pues son los valores de x en donde a la izquierda hay una función y a la derecha otra.

x=-5

Primera condición:

$$\exists \boldsymbol{f}(-\mathbf{5})? \rightarrow f(-5) = (-5)^2 + 5(-5) = 0$$

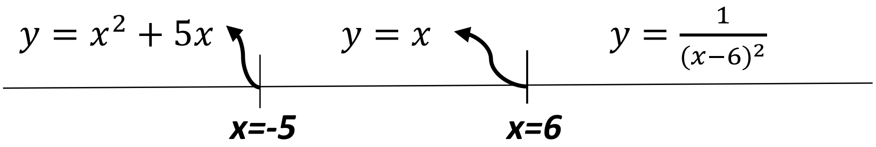
$$f(-5) = 0$$

Por lo tanto, se cumple la primera condición.

Segunda condición:

$$\exists \lim_{x \to -5} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Como antes, tenemos que hacer los límites laterales pues a la izquierda de $x = -5$ la función está definida de una manera y a la derecha de otra:

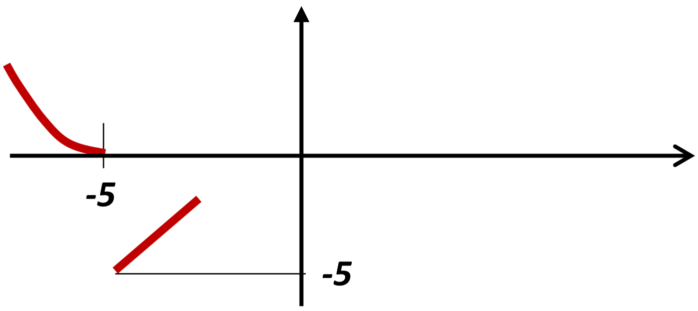


$$\lim_{x\to -5^-} f(x) = \lim_{x\to -5^-} x^2 + 5x = 25 - 25 = 0$$

$$\lim_{x\to -5^+} f(x) = \lim_{x\to -5^+} x = -5$$

Como vemos, **los límites laterales son distintos** y por lo tanto **NO existe el límite**, siendo entonces la función discontinua en $x = -5$

La "pinta" de la gráfica alrededor de $x = -5$ es algo así



La función "salta" de $y = 0$ a $y = -5$ y por eso se dice que esta DISCONTINUIDAD ES DE SALTO FINITO.

Ahora, de la misma manera, estudiamos el valor

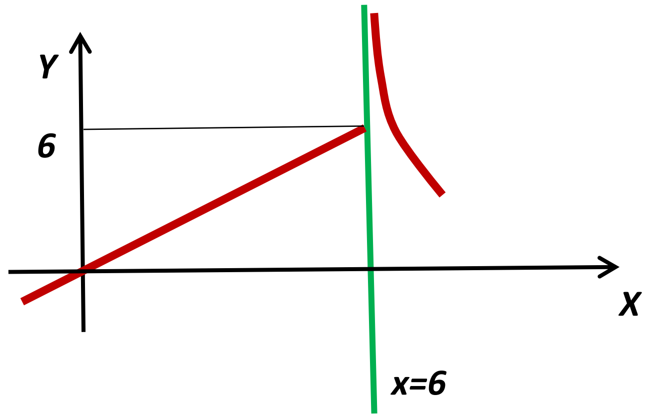
x=6

$$\boldsymbol{f(6) = 6}$$

$$\lim_{x\to 6^-} f(x) = \lim_{x\to 6^-} x = 6$$

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = \lim_{x\to 6^+} \frac{1}{(x-6)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Tampoco existe el límite y la función tampoco es entonces continua en este valor de ***x***. La "pinta" de la gráfica alrededor de $x = 6$ sería



Como vemos, en *x=6,* la función "salta" de *y=6 por la izquierda* a $y \to \infty$. Por eso se dice que esta DISCONTINUIDAD ES DE SALTO INFINITO.

A la recta *x=6*, a la cual la gráfica se va acercando, PERO SIN TOCAR NUNCA, se le llama *ASINTOTA VERTICAL*.

Se dice que $x = k$ es una asíntota vertical si se cumple:

$$\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty$$

Con esto, ya habríamos acabado el estudio de la continuidad de esta función. Ahora vamos más allá porque vamos a dibujarla y hacer un esbozo de ella porque es interesante y se puede preguntar.

ASÍNTOTA HORIZONTAL

Si la gráfica, la altura ***"y"***, se acerca se acerca a algún valor determinado ***k*** cuando la variable ***x*** se acerca a $\pm\infty$ se dice que ***y=k*** es una asíntota horizontal. En nuestro caso:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + 5x = \lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$$

Donde para hacer el límite hemos aplicado la equivalencia entre polinomios cuando ***x*** tiende a infinito. Por este lado, por la izquierda, no existe asíntota horizontal pues como vemos la función no se acerca a una altura determinada.

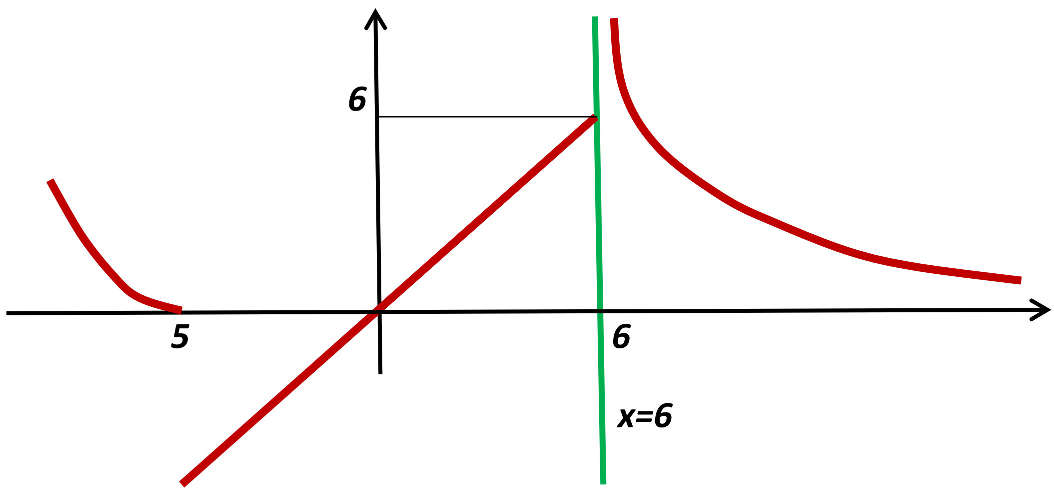
Veamos por la derecha, cuando la variable se acerca a infinito positivo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-6)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Y, en este caso, **SI que la función y se acerca a un valor determinado, *y=0*, y por lo tanto la recta**

$$\boldsymbol{y = 0}$$

Es una asíntota horizontal. Un esbozo de la gráfica sería, agrupando toda la información estudiada, algo así



Ejemplo 3

Estudiar la continuidad de la función y determinar sus asíntotas

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 3}$$

Para estudiar la continuidad de esta función, que no está definida a trozos como la anterior, nos tenemos que fijar en el denominador y qué valores de ***"x"*** lo anulan porque, como sabemos, no se puede dividir entre cero.

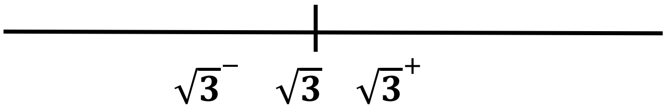
$$x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Por lo tanto, vamos a estudiar la continuidad y aplicar la definición para esos valores de ***"x".***

$$\boldsymbol{x = +\sqrt{3}}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2 - 3} = \frac{3}{0} \nexists$$

La función, en ese valor de *"x"*, ya no cumple la primera condición de continuidad y por ello ya podemos decir que es discontinua. Pero vamos a estudiar que pasa en sus alrededores haciendo los límites laterales (obligatorio como sabemos cuándo nos queda una expresión de ese tipo, un número dividido entre algo que se acerca a cero)



$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-}\frac{x^2}{x^2-3}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

Hemos puesto que la resta tiende a cero, **pero siendo un número muy pequeño NEGATIVO, porque al estar a la izquierda de $\sqrt{3}$ su cuadrado no llega a tres y por lo tanto la resta del denominador es negativa**.

Análogamente

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{x^2}{x^2-3}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

Porque el denominador tiende a cero, también, pero al estar *"x"* a la derecha de raíz de tres su cuadrado es un poco mayor que tres y por lo tanto la resta es positiva.

Podemos ya decir que la **discontinuidad es de salto infinito** y además que la recta

$$\boldsymbol{x=\sqrt{3}}$$

Como ya hemos comentado en lecciones anteriores, es una asíntota vertical porque se cumple la definición:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\pm\infty}$$

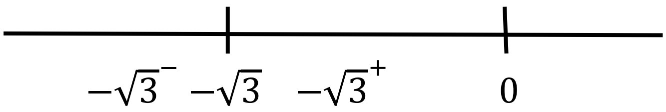
Estudiamos ahora el valor

$$\boldsymbol{x=-\sqrt{3}}$$

Para estudiar la continuidad estudiamos la primera condición, el valor de la función para ese valor de "x"

$$f(-\sqrt{3})=\frac{(-\sqrt{3})^2}{(-\sqrt{3})^2-3}=\frac{3}{0}\rightarrow \nexists f(-\sqrt{3})$$

Ya sabemos entonces que es discontinua, pero, como en el caso anterior, estudiamos los límites laterales.



$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-}\frac{x^2}{x^2-3}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

Hemos puesto el "cero" positivo porque a la izquierda de $-\sqrt{3}$ el número es mayor en módulo que $\sqrt{3}$ (por tratarse de números negativos) y entonces al elevarlo al cuadrado el resultado es un poco mayor que tres.

Análogamente

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^+}\frac{x^2}{x^2-3}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

Al estar a la derecha de $-\sqrt{3}$ el módulo de esos números es menor que $\sqrt{3}$ y al elevarlo al cuadrado no llega a tres, por lo que la resta es negativa.

Podemos entonces decir que la **discontinuidad es de salto infinito**. Además, la recta

$$x=-\sqrt{3}$$

Es una asíntota vertical por cumplirse que

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}}f(x)=\pm\infty$$

Como antes, ya hemos estudiado la continuidad, pero vamos seguir estudiando las asíntotas horizontales para poder hacer un esbozo de la función

Sabemos que, por definición, son rectas horizontales

$$\boldsymbol{y = k}$$

Siendo $\boldsymbol{k}$ el valor del límite de la función cuando "x" tiende a infinito. Veamos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Pues los polinomios son equivalentes a la "x" de mayor grado cuando esta tiende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Por la misma razón.

Concluimos entonces que la recta

y=1

Es una asíntota horizontal.

Como, además, la función es par, simétrica respecto al eje Y

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2-3} = \frac{x^2}{x^2-3} = f(x)$$

Con la información que tenemos, las asíntotas en verde, la "pinta" de la gráfica sería: