APLICACIONES TEOREMA DE GAUSS. CÁLCULO DE CAMPOS ELÉCTRICOS

PAUTAS para aplicar el teorema de Gauss

Es fundamental seguir unas pautas para llegar al resultado. Vamos a decirlas primero y después las aplicaremos a rajatabla en los ejemplos:

PRIMERA: Por el punto en el que queramos calcular el campo eléctrico hacemos pasar una superficie cerrada (llamada gaussiana) **en la cual se cumpla que el módulo del campo sea constante (aunque obviamente desconocido) o bien en alguna de sus partes el flujo sea cero.** Esto es necesario como vamos a ver **para poder calcular el flujo primero por la definición. Estas superficies serán siempre cilindros excepto en las esferas que también serán esferas.**

SEGUNDA: Se calcula el flujo aplicando la definición

TERCERA: Se calcula el flujo aplicando el teorema de Gauss

CUARTA: Se igualan ambas expresiones y es entonces cuando podremos deducir el valor del módulo del campo eléctrico.

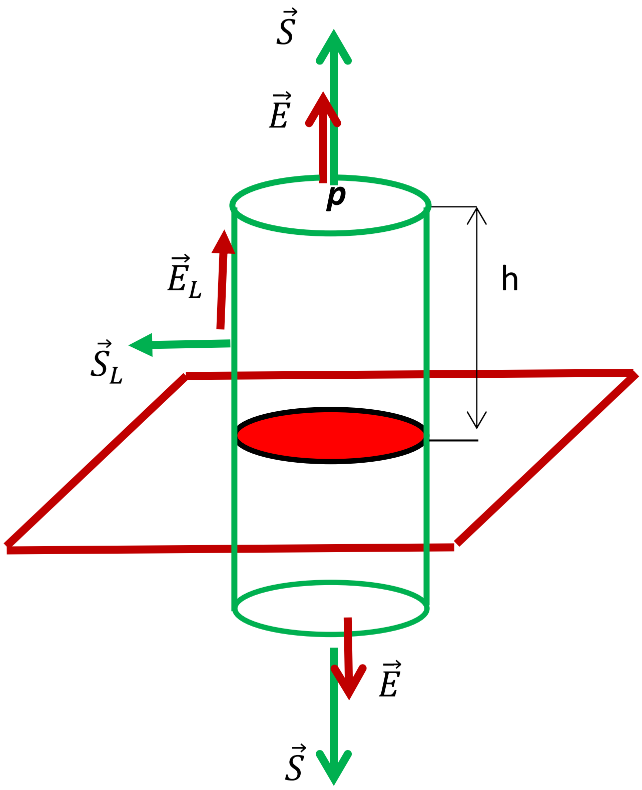
CAMPO ELECTRICO PRODUCIDO POR UN PLANO INDEFINIDO

Estos problemas requieren cierta imaginación, aunque intentamos que sea la mínima posible. Por ejemplo, igual nos parece raro elegir un cilindro como superficie "gaussiana" a la que aplicar el teorema, pero ya hemos dicho que eso era así salvo cuando tengamos distribuciones de carga esféricas. Pero, pensamos que, partiendo de ahí, se comprenda que ésa es la superficie que cumple las pautas de las que hemos hablado y se entienda el procedimiento.

Sea la superficie plana de la figura cargada con una densidad superficial de carga $\sigma \ {}^{C}/_{m^2}$

Queremos calcular el campo en el punto P de la figura situado a una distancia *h* de él.

1º paso: por él hacemos pasar el cilindro cerrado que se muestra.



Veamos como en dicho cilindro se cumplen las pautas de las que hemos hablado y por ello podemos calcular el flujo aplicando la definición:

En todos los puntos de las dos tapas el campo es vertical (no puede estar "torcido" hacia la derecha o hacia la izquierda porque el plano es infinito y hay la misma carga a la derecha que a la izquierda) y su módulo ha de ser el mismo (aunque desconocido) porque ambas están a la misma distancia del plano. En la tapa de arriba el campo será hacía arriba puesto que el plano tiene carga positiva y repelerá a la unidad de carga positiva. Por la misma razón, el campo en la tapa de abajo será hacía abajo. En la superficie lateral del cilindro el flujo es cero porque al ser el campo vertical pasa de "perfil" por la superficie y no entra ni sale de ella. Como se observa en la figura, **en la superficie lateral el vector campo, $\vec{E}_L$, es perpendicular a $\vec{S}_L$ y, por lo tanto, su producto escalar, el flujo, es cero**.

2º paso: calculamos ya el flujo aplicando la definición:

$$\emptyset_{tapa\ superior} = E \cdot S \cdot cos0 = E \cdot S$$

$$\emptyset_{tapa\ inferior} = E \cdot S \cdot cos0 = E \cdot S$$

$$\emptyset_{\boldsymbol{total}} = \boldsymbol{2ES}$$

Donde ***S*** es la superficie de las tapas, que es la misma en las dos claramente.

3º paso: calculamos el flujo aplicando Gauss

La carga interior al cilindro es la que pertenece a la superficie del plano que contiene, en rojo marcada en la figura, y es la misma que la de las tapas ***S.*** Como la densidad de carga en el plano es $\sigma\ {}^{C}/_{m^2}$, la carga que contiene en su interior el cilindro es:

$$Q = \sigma \cdot S$$

Entonces, aplicando el teorema:

$$\emptyset = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma \cdot S}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

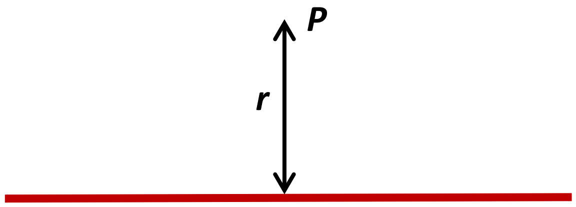
4º paso: igualamos ambos flujos y despejamos E

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon} \rightarrow$$

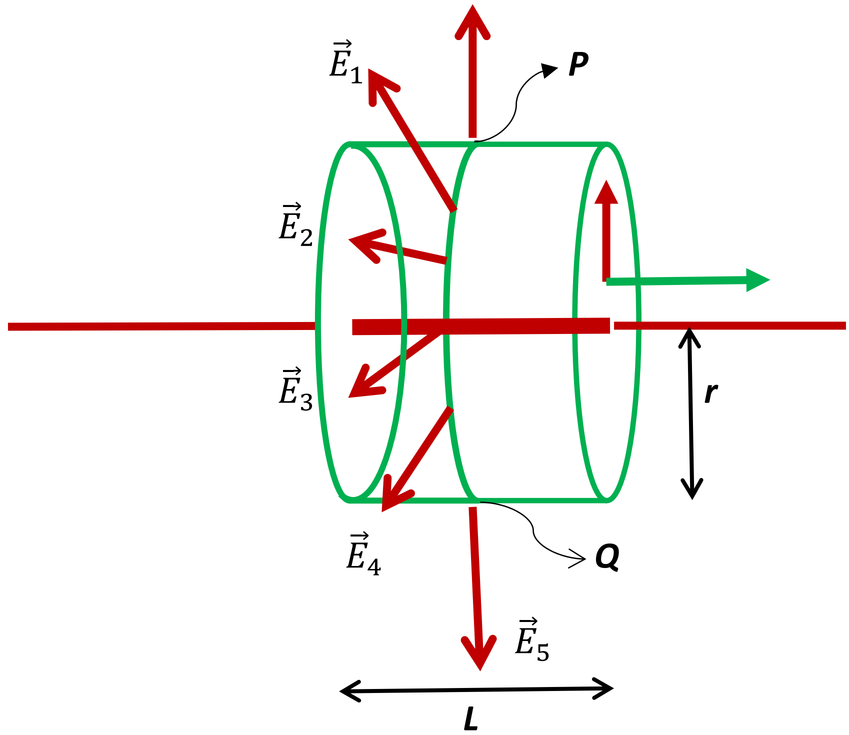
$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon}}$$

CAMPO ELECTRICO CREADO POR UN HILO INDEFINIDO

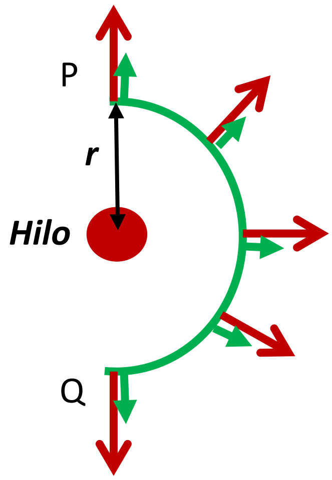
Sea el hilo infinito de la figura cargado con una densidad de carga $\gamma \frac{C}{m}$. Queremos calcular el campo en el punto P de la figura definido por su distancia "r" al cable:



Por el punto P hacemos pasar una superficie cerrada que cumpla las pautas o condiciones dichas, otro cilindro de longitud ***L*** y radio ***r***:



Para dibujar el campo en la superficie del cilindro se han cogido los puntos de la semicircunferencia PQ que vista mirando al cilindro desde la derecha y de frente a su tapa queda:



Como vemos, el campo eléctrico en cada punto de la superficie lateral del cilindro es perpendicular a la superficie y de módulo constante por lo que no tendremos que integrar para calcular el flujo y su valor será $E \cdot S$. Por las tapas del cilindro el flujo será cero porque el campo pasa "de perfil" y es perpendicular al vector superficie, como podemos apreciar en la figura. Por lo tanto, estamos en condiciones de calcular el flujo total por el cilindro aplicando la definición:

$$\emptyset_{\boldsymbol{definición\,S.\ lateral}} = \left|\iint \vec{E}d\vec{s} = \int E \cdot ds \cdot cos0 = E \int ds = E \cdot S\right| = E \cdot S_{lateral} = \boldsymbol{E \cdot 2\pi r L}$$

Ahora, en un segundo paso como ya hemos comentado, calculamos el flujo aplicando el teorema de Gauss

$$\emptyset_{\boldsymbol{gaus}} = \frac{q_{interior}}{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\gamma L}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

En donde la carga interior al cilindro está en la longitud L del cable que abarca el cilindro y será, con γ la densidad lineal de carga del cable, γL. Por último, igualamos ambas expresiones:

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{\gamma L}{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon r}}$$