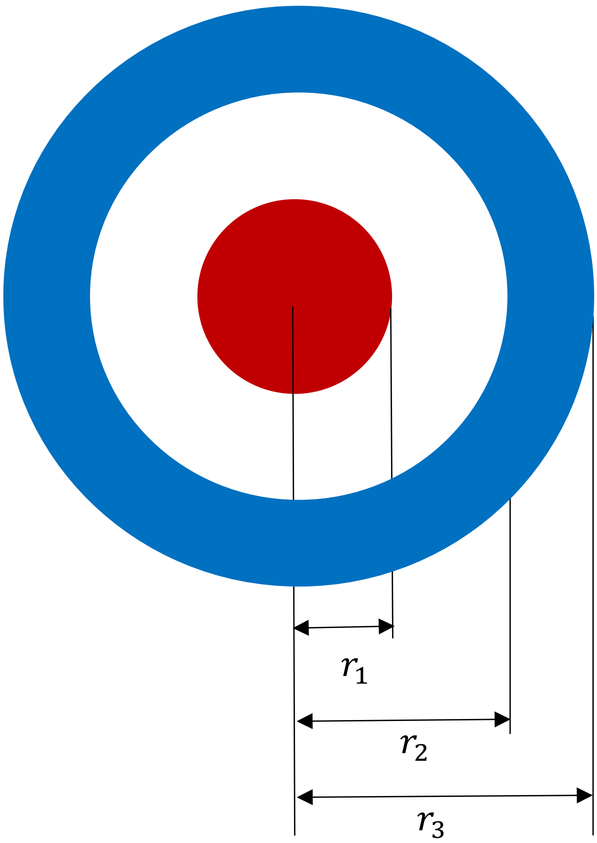
Ejemplo 6

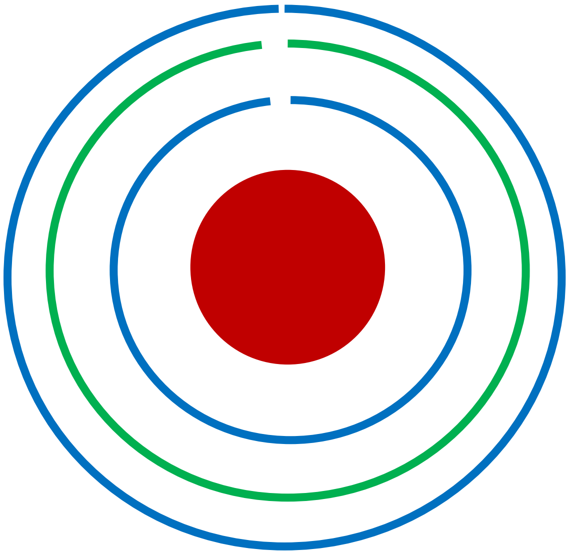
Una esfera dieléctrica de radio r_1 y carga total +Q está rodeada por una corteza esférica conductora de radio interior r_2 y radio exterior r_3. La corteza esférica tiene una carga total de -Q. Determinar, primero, la distribución de la carga en la corteza esférica. Segundo, calcular el campo en todos los puntos, en el interior de la esfera dieléctrica, entre ambas, dentro de la corteza esférica y en el exterior de ellas.



La esfera roja central está cargada con una distribución de carga uniforma y de valor total ***+Q*** y la corteza, en azul, es conductora y tiene una carga total ***-Q***.

Lo primero que nos preguntan, y debemos de saber, aunque no lo hagan, es **cómo está distribuida la carga *-Q* en la corteza conductora**. Ya sabemos que, por ser conductora, su carga ha de estar obligatoriamente en sus superficies. Pero, por ahora, no sabemos que carga hay en su superficie interior y qué carga hay en su superficie exterior. Veamos.

Hacemos pasar por su interior una esfera, superficie gaussiana, en verde tal como indica la figura



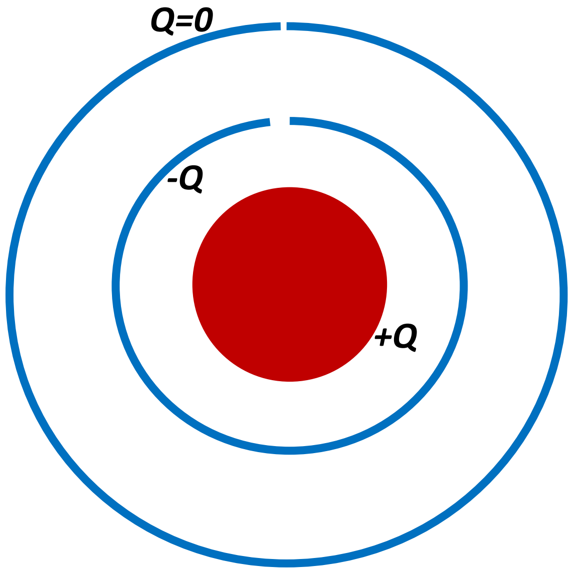
Sabemos que el campo dentro de un conductor en equilibrio es cero. Por lo tanto, el flujo que atraviesa la bola verde también es cero.

$$\phi = 0 \rightarrow \left|\phi = \frac{q_{interior}}{\varepsilon}\right| \rightarrow 0 = \frac{q_{interior}}{\varepsilon} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{q_{interior} = 0}$$

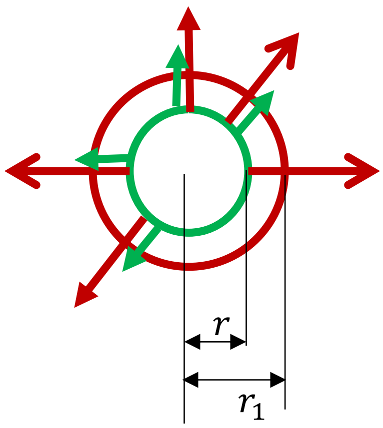
Por lo tanto, dentro de la bola verde la carga total es cero. Dado que la esfera central tiene carga ***+Q*** hemos de deducir que hay otra carga ***-Q*** dentro. **Pero sólo puede estar en la superficie interior de la corteza conductora, y así es: en la superficie interior de la corteza conductora hay una cara *-Q*.** Como la carga total de la corteza dada en el enunciado es ***-Q*** deducimos que en la superficie exterior de la corteza no hay carga. **En otro caso, en la superficie exterior habría una carga tal que sumada con la de superficie interior nos diera la carga total dada como dato en el problema**.

Resumiendo, con la información que hemos obtenido, tenemos las cargas de la siguiente manera:



Sabiendo la distribución de las cargas, estamos en condiciones de calcular el campo eléctrico a distintas distancias del centro.

a) **Si** $\boldsymbol{r < r_1}$



Estamos de la esfera azul, con carga total ***+Q.*** En la figura se representa el campo en la superficie gaussiana verde, de radio ***r,*** como vectores rojos. El vector superficie en cada punto se dibuja en verde.

Aplicando la definición de flujo a la superficie gaussiana verde:

$$\phi_{defin.} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot s = \boldsymbol{4\pi r^2 \cdot E}$$

Puesto que el módulo del campo en todos sus puntos es, aunque desconocido, del mismo valor. También, como se observa en la figura, los vectores campo eléctrico y superficie forman cero grados.

$$\phi_{Gauss} = \frac{q_{interior}}{\varepsilon} = \left| \begin{array}{c} densidad\ carga = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} \\ \boldsymbol{q_{interior}} = V \cdot d = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \cdot \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{r_1^3}} \cdot \boldsymbol{r^3} \end{array} \right|$$

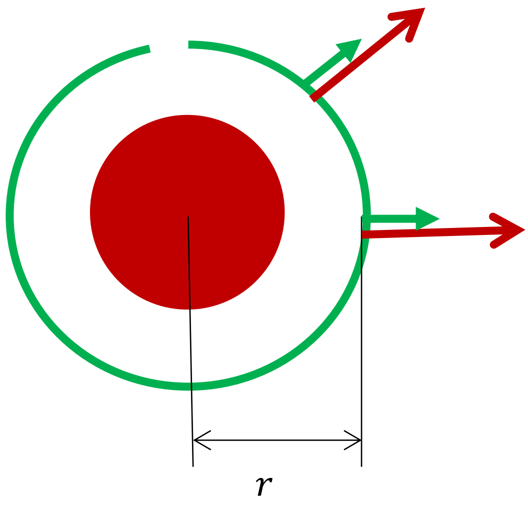
$$= \frac{\frac{Q}{r_1^3} \cdot r^3}{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon \cdot r_1^3}} \boldsymbol{r^3}$$

Igualando ambos flujos:

$$\boldsymbol{4\pi r^2 \cdot E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot r_1^3} r^3 \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot r_1^3} \cdot r}$$

El campo en el interior de la esfera dieléctrica crece linealmente hacia su superficie, siendo cero en su centro.

b) Si $\boldsymbol{r_1 < r < r_2}$



Con el mismo código de colores y aplicando las mismas ideas:

$$\phi_{defin.} = \int \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cdot s = \boldsymbol{4\pi r^2\cdot E}$$

$$\phi_{Gauss} = \frac{q_{interior}}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

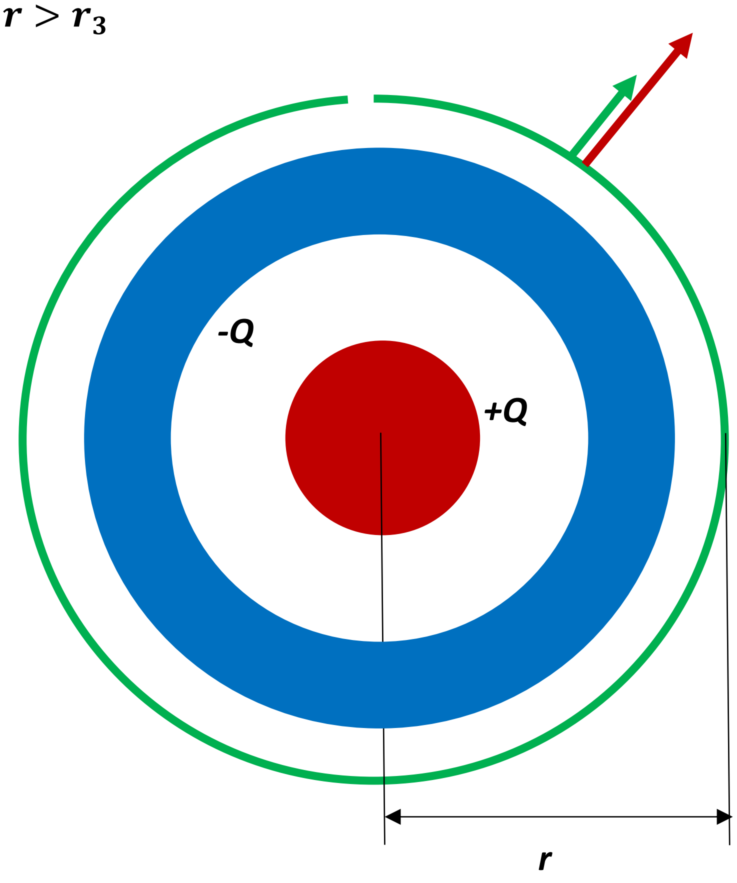
Ya que ahora la carga interior a la superficie gaussiana verde no depende de r. Igualando ambos flujos:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}}$$

c) Si $\boldsymbol{r_2 < r < r_3}$

Por tratarse de un conductor, y como ya se ha dicho antes, el campo eléctrico en estos puntos vale ***cero.***

d) Si $\boldsymbol{r > r_3}$



Con el mismo código de colores, hemos dibujado la superficie gaussiana, de radio $r > r_3$ y en ella los vectores campo y superficie en un punto de ella. El campo, en rojo, ha de ser radial por simetría, de la misma dirección y sentido que el vector superficie, en verde. Aplicamos el teorema a dicha superficie:

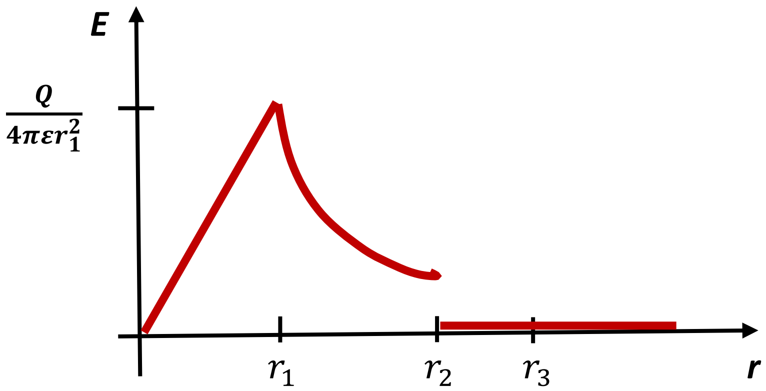
$$\Phi_{definición} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\Phi_{Gauss} = \frac{q_{interior}}{\varepsilon} = 0$$

Igualando:

$$E \cdot 4\pi r^2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{E = 0}$$

Por último, representamos el módulo del campo en los distintos puntos en función de su distancia al centro de la esfera central.



.

.