INTEGRALES RACIONALES

Son integrales en la que **el integrando es el cociente de dos polinomios.** Para resolverlas se clasifican en dos tipos fundamentales. El segundo tipo, a su vez, se subdivide en tres tipos.

Tipo1. El grado del polinomio numerador es mayor o igual que el del denominador. Dividiendo ambos polinomios transformamos la integral en otra del tipo 2. Esta transformación la vemos en los ejemplos.

Tipo2. Aquellas en las que el grado del numerador es menor que el del denominador. Se dividen en tres subtipos según:

2a: raíces del denominador reales y distintas

2b: raíces del denominador reales e iguales

2c: raíces del denominador imaginarias y distintas

A continuación, vemos cómo se resuelve cada tipo por ese orden. Empezamos por el tipo 1 y vemos cómo se transforma en una de tipo 2. **Esta transformación es siempre la misma, independientemente del tipo 2 que nos salga.** En nuestro primer ejemplo nos va a salir del tipo 2a (raíces del denominador reales y distintas):

Ejemplo 1. Tipo 1

GRADO DEL NUMERADOR MAYOR O IGUAL QUE EL GRADO DEL DEL DENOMMINADOR.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}dx$$

En esta integral vemos que los grados de los dos polinomios son iguales. Hay que saber que, aplicando las transformaciones algebraicas que vamos a ver, **es obligatorio transformar el integrando en otro en el que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador**.

Para conseguir lo que hemos dicho, dividimos los dos polinomios:

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2} -x^2 \;\; 5x \;\; -6 & 1 \\ \cline{1-1} 5x-5 & \end{array}$$

Como sabemos, dividendo es igual a divisor por cociente más resto y esta igualdad nos lleva a:

$$D = dC + R \rightarrow \frac{D}{d} = \frac{dC}{d} + \frac{R}{d} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}}$$

Esta fórmula nos va a permitir conseguir nuestro objetivo. Aplicándola a nuestro caso:

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6}$$

Y sustituyendo en la integral de partida

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}dx = \int \left(1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6}\right)dx$$
$$= \int 1dx + \int \boldsymbol{\frac{5x-5}{x^2-5x+6}dx} = x + \boldsymbol{I}$$

Donde la última integral, remarcada en negrita, ya es del tipo 2, **grado del numerador menor que el grado del denominador**. De los tres tipos de integrales del segundo tipo, la que nos ha salido vamos a ver que es del primero, 2a. La hacemos "aparte" para que nos sirva de ejemplo. **Cuando la calculemos habría que volver y sustituirla para cerrar el ejemplo 1.**

Ejemplo 2. Tipo 2a.

RAÍCES DEL DENOMINADOR REALES Y DISTINTAS

$$\int \frac{\mathbf{5x-5}}{\mathbf{x^2-5x+6}}\,\mathbf{dx} =$$

Según la clasificación dada, la manera de resolver estas integrales depende de las raíces del denominador. Por lo tanto, es lo primero que hacemos:

$$x^2-5x+6=0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Reales y distintas. Estamos, como hemos dicho, en el primer caso. **Hemos de saber, de aprender, que el quebrado integrando se puede y se debe descomponer en suma de dos, tal como se indica. Cada uno de los quebrados lleva por denominador uno de los monomios cuyo producto es el polinomio denominador.**

$$\frac{5x-5}{x^2-5x+6}=\frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}=\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{x-2}}+\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{x-3}}\,\mathbf{(1)}$$

Donde ***A y B*** son números que hemos de calcular. Para ello, hacemos la suma y llegamos a:

$$\frac{5x-5}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

Como los denominadores son iguales, **igualamos los numeradores**

$$5x-5=A(x-3)+B(x-2)$$

Es una igualdad entre polinomios. Podíamos calcular ***A y B*** igualando los coeficientes del mismo grado de ambos polinomios Es más cómodo, sin embargo, dar valores a “x” y sustituirlos en la ecuación anterior, justo los valores ***x=2 y x=3,*** como vemos a continuación:

$$5x-5=A(x-3)+B(x-2) \rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 5=-A \rightarrow \boldsymbol{A}=\mathbf{-5} \\ x=3 \rightarrow \mathbf{10}=\boldsymbol{B} \end{cases}$$

Calculados los valores de A y B, sustituimos en la ecuación (1)

$$\frac{\mathbf{5x-5}}{\mathbf{x^2-5x+6}}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{x-2}}+\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{x-3}}$$

Y sustituyendo en la integral:

$$\int\frac{5x-5}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{x-2}}+\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{x-3}}\right)dx=$$

$$\int\frac{-5}{x-2}dx+\int\frac{10}{x-3}dx=-5Lg(x-2)+10Lg(x-3)+C$$

Ejemplo 3. Tipo 2b

RAÍCES DEL DENOMINADOR REALES E IGUALES, RAÍCES MÚLTIPLES.

$$\int\frac{x+1}{x^2-6x+9}dx$$

Como antes, Lo primero que hacemos es buscar las raíces del denominador:

$$x^2-6x+9=0\rightarrow\frac{-(-6)\pm\sqrt{36-4\cdot 9}}{2}=\begin{cases}x=3\\x=3\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow x^2-6x+9=(x-3)^2$$

El integrando queda entonces

$$\frac{x+1}{x^2-6x+9}=\frac{x+1}{(x-3)^2}$$

La segunda fracción hay que saber que debe de ponerse de la siguiente manera:

$$\frac{x+1}{x^2-6x+9}=\frac{x+1}{(x-3)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}$$

Donde empezando por el monomio elevado a la uno en el primer quebrado tenemos que llegar a $(x-2)^2$ en nuestro caso, aumentando el exponente de uno en uno. Si hubiera sido $(x-2)^3$ habríamos añadido a los dos anteriores un tercer quebrado con el denominador $(x-2)^3$. Para calcular *A y B* procedemos como antes:

$$\frac{x+1}{x^2-6x+9}=\frac{A(x-3)+B}{(x-3)^2}$$

Igualando numeradores, ya que los denominadores son iguales, nos queda:

$$x+1=A(x-3)+B:$$

Identidad que se cumple para cualquier valor de x:

$$Si\ x=3\rightarrow 4=B$$

$$Si\ x=0\rightarrow 1=-3A+4\rightarrow A=1$$

Como el integrando inicial lo hemos separado en dos sumandos fácilmente integrables, nos queda:

$$\int\frac{x+1}{x^2-6x+9}dx=\int\frac{1}{x-3}dx+\int\frac{4}{(x-3)^2}dx=Lg(x-3)-\frac{4}{x-3}+C$$

Donde en la segunda integral se ha aplicado el cambio de variable visto ya en el método “cambio de variable”

$ax+b=t\rightarrow x-3=t$ reduciéndose a una inmediata.

victor loza
ACADEMIA ONLINE

Ejemplo 4. Tipo 2c

RAÍCES DEL DENOMINADOR IMAGINARIAS

$$\int \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x^2+x+1}}\boldsymbol{dx}$$

Buscamos las raíces del denominador:

$$x^2+x+1 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

Solución no real como se ve. Entonces procedemos como **sigue**:

1º Transformamos el polinomio denominador en un polinomio del tipo $\boldsymbol{(x+a)^2+b}$

lo que se llama "**completar cuadrados**":

$$\mathbf{x^2+x+1}=(x+a)^2+b=\boldsymbol{x^2+2ax+a^2+b}$$

Igualando los coeficientes del mismo grado del primer y último polinomio nos queda

Términos en $\boldsymbol{x^2}$: la igualdad ya se cumple. **Ver nota (1) al final**

Términos en "x"

$$\boldsymbol{1=2a\rightarrow a=\frac{1}{2}}$$

Términos independientes

$$\boldsymbol{1=a^2+b\rightarrow 1=\frac{1}{4}+b\rightarrow b=\frac{3}{4}}$$

Llevando esto a la integral:

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\left[\boldsymbol{x+\frac{1}{2}=t\rightarrow dx=dt\ y\ x=t-\frac{1}{2}}\right]$$

Donde vemos que el paso que se ha dado es el primer cambio de variable, la función lineal:

$$x+\frac{1}{2}=t$$

El siguiente paso es separar en dos sumandos el integrando pues

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

$$=\int \frac{t-\frac{1}{2}+1}{t^2+\frac{3}{4}}=\int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt+\int \frac{\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=$$

Cada una de las dos integrales es casi inmediata, veamos la primera:

$$\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt$$

Tenemos que ver que abajo hay una función y arriba su derivada. Es, por lo tanto, por cambio de variable. Pero sale tantas veces que, en este caso, sí vamos a utilizar una "receta" de las que no somos amigos. Es la siguiente:

$$\int \frac{f'dx}{f}=Lnf$$

Aplicándola a nuestra integral

$$\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}Ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|$$

Donde hemos puesto el ***2*** en el numerador para que sea la derivada del denominador. Obligatoriamente, claro, hemos dividido entonces entre ***2*** fuera de la integral.

La segunda integral:

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \left|\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}Arctg\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

Puesto que en nuestro caso

$$a^2 = \frac{3}{4} \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo las dos integrales, nos queda:

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}Ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}Arctg\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \left|t = x+\frac{1}{2}\right| =$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}Ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}Arctg\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C}$$

Nota (1)

Si el polinomio de segundo grado del denominador fuera de la forma

$$\boldsymbol{Ax^2+Bx+C}$$

Para completar cuadrados lo pondríamos en la forma

$$\boldsymbol{Ax^2+Bx+C = A(x+a)^2+b}$$

Puesto que si no lo pondríamos no se cumpliría la igualdad en los términos de *"x"* al cuadrado

No olvidar entonces el coeficiente de x cuadrado, *A,* en el polinomio de la derecha para "completar cuadrados".