IRRACIONALES CUADRÁTICAS

Se llaman irracionales cuadráticas a las que dentro de la raíz aparece un polinomio de segundo grado y, evidentemente, no se pueden hacer los cambios de variable esenciales vistos en la lección de "cambio de variable". Primero distinguimos tres tipos de irracionales cuadráticas, según sea el radicando:

$$\mathbf{1^{a}} \int F\left(\sqrt{a-bx^2}\right)dx$$

$$\mathbf{2^{a}} \int F\left(\sqrt{ax^2-b}\right)dx$$

$$\mathbf{3^{a}} \int F\left(\sqrt{ax^2+b}\right)dx$$

Según aparezcan en el numerador o en el denominador, el método es distinto. En esta lección hablaremos del método cuando aparecen en el denominador, es más sencillo que se aparecen en el numerador.

APARECEN EN EL DENOMINADOR

Podemos llegar a una inmediata, teniendo en cuenta estas dos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = Arcsen\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = Lg\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

Veamos cómo se hacen con un ejemplo.

victor loza
ACADEMIA ONLINE

Ejemplo

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}\,\boldsymbol{dx}$$

Lo primero que hacemos es transformar el polinomio en un monomio al cuadrado más un número, lo que se llama "completar cuadrados"

$$-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}=(-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{b}=-x^2-2ax-a^2+b\rightarrow$$

Fijarse que el coeficiente de la ***"x"*** elevada al cuadrado va delante del paréntesis. De esa manera aseguramos la igualdad en las ***"x"*** al cuadrado. Igualando los coeficientes en ***"x"*** y en los términos independientes:

$$\begin{cases} 1=-2a \\ 0=-a^2+b \end{cases}\rightarrow a=\frac{-1}{2};\, b=\frac{1}{4}\rightarrow -x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx=\left|x-\frac{1}{2}=t\ (función\ lineal)\rightarrow dx=dt\right|$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}}=\left|\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=Arcsen\frac{x}{a}\right|=Arcsen\frac{t}{\frac{1}{2}}$$

$$=\boldsymbol{Arcsen2}\left(\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)+\boldsymbol{C}$$

Como vemos, completando cuadrados llegamos a una de las dos inmediatas, en este caso la primera. Saldrán más ejemplos.