VECTORES LIBRES Y LIGADOS. COORDENADAS

COMBINACIÓN LINEAL DE UNA FAMILIA DE VECTORES

Una familia de vectores es un conjunto de varios vectores. Se define combinación lineal de una familia de vectores a cualquier suma de ellos multiplicados por números.

VECTORES LIBRES Y VECTORES LIGADOS

Sea una familia de vectores F

$$\boldsymbol{F} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots . \vec{\boldsymbol{v}}_n)$$

Se dice que F es libre **si para que se cumpla la ecuación**

$$\boldsymbol{\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = 0}$$

Es necesario que todos los coeficientes reales $\boldsymbol{\alpha_i}$ sean cero

$\boldsymbol{\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0}$

Geométricamente podemos decir que si dos vectores son libres es que tienen distinta dirección. Si tres vectores son libres es que los tres **tienen distinta dirección y no están en el mismo plano**. En general, el número de vectores libres de una familia coincide con las distintas direcciones que representan. Una técnica para **averiguar cuántos vectores libres** contiene una familia de ellos **es calcular el rango de la matriz que definen**. **Habrá tantos vectores libres como sea el rango de la matriz** que forman. Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 1

Sean los vectores

$$\vec{v}_1 = (1,2,3)\ \ \vec{v}_2 = (-2,3,5)\ \ \vec{v}_3 = (-1,5,8)$$

¿Representan tres direcciones distintas, dimensiones, en el espacio de tres dimensiones? ¿Están los tres en el mismo plano? ¿Los tres representan la misma dirección?

Para responder a estas preguntas calculamos el rango de la matriz formada por ellos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

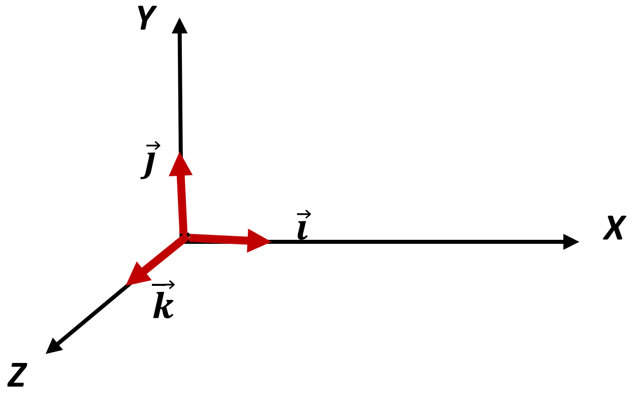
Como **el rango es dos** significa que sólo hay dos vectores libres, el tercer vector es combinación lineal de los dos primeros **y por lo tanto está en el plano de ellos**. No representan, por lo tanto, tres dimensiones, sino sólo dos. **Si el rango hubiera salido tres tendríamos entonces tres direcciones distintas en el espacio de tres dimensiones**. **Si el rango hubiera salido uno entonces los tres vectores marcaban la misma dirección**, serían paralelos los tres. Esto, como veremos, se utiliza, por ejemplo, para saber si dos rectas se cruzan o, por el contrario, están en el mismo plano.

COORDENADAS DE UN VECTOR RESPECTO DE OTROS DADOS

Cuando hablamos de un vector y damos sus coordenadas es fácil olvidar que dichas coordenadas no tienen sentido si no se ha dado el sistema de referencia o base respecto al cuál se miden esas coordenadas. Normalmente se asume que es respecto a un sistema de referencia definida “intrínsicamente”, lo que se denomina **BASE**

$$\vec{\imath} = (1,0,0) \quad \vec{\jmath} = (0,1,0) \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

Que representan los tres vectores unitarios y perpendiculares del triedro de referencia



Dicho triedro (que en un problema "real o práctico" hay que definir, por ejemplo, las tres intersecciones de las paredes de un laboratorio) se **llama BASE ORTONORMAL por ser los tres vectores unitarios y perpendiculares.**

Pero puede ocurrir que, manteniendo el sistema de referencia, queramos poner las coordenadas de un vector respecto de otros tres libres pero que no sean la base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Creemos que con un ejemplo se entiende perfectamente.

Ejemplo 3

Calcular las coordenadas del vector $\vec{v} = (2, -3, 5)$ respecto de los vectores

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 3) \quad \vec{u}_2 = (-1, 0, 2) \quad \vec{u}_3 = (1, 1, 1)$$

Ponemos el vector dado como combinación lineal de los tres vectores dados respecto a los que queremos calcular sus coordenadas. **Los números α, β y γ son las coordenadas pedidas**

$$\vec{v} = (2, -3, 5) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(-1, 0, 2) + \gamma(1, 1, 1) \rightarrow$$

$$(2, -3, 5) = (\alpha - \beta + \gamma, 2\alpha + \gamma, 3\alpha + 2\beta + \gamma) \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha - \beta + \gamma \\ -3 = 2\alpha + \gamma \\ 5 = 3\alpha + 2\beta + \gamma \end{cases}$$

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2^{a}F \rightarrow 2^{a}F + 1^{a}F \cdot (-2) \\ 3^{a}F \rightarrow 3^{a}F + 1^{a}F \cdot (-3) \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim |3^{a}F \rightarrow 3^{a}F \cdot (-2) + 2^{a}F \cdot 5| \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -33 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$3^{a}\ ecuación\ \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{33} \rightarrow |2^{a}\ ecuación| \rightarrow 2\beta - 33 = -5 \rightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{14}$$

Y llevando estos valores a la primera ecuación

$$\alpha - 14 + 33 = 2 \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{-17}$$

Siendo estos valores las coordenadas del vector en la nueva base y se cumple:

$$\vec{v} = \mathbf{2}\vec{\imath} - \mathbf{3}\vec{\jmath} + \mathbf{5}\vec{k} = \mathbf{-17}\vec{u}_1 + \mathbf{14}\vec{u}_2 + \mathbf{33}\vec{u}_3$$