TRIÁNGULOS

MEDIATRIZ. MEDIANA. ALTURA. BISECTRIZ.

ÁREA

DEFINICIONES DE LINEAS IMPORTANTES EN UN TRIÁNGULO

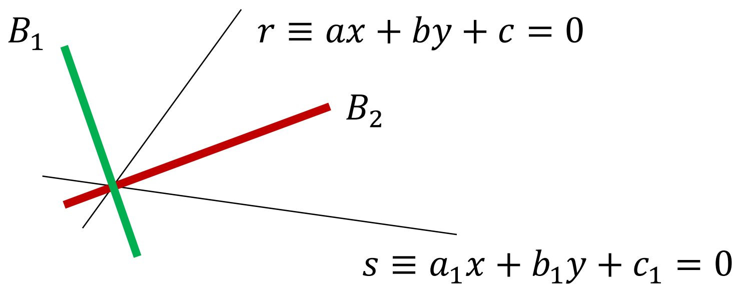
En cualquier triángulo se definen las siguientes líneas. Haremos un ejemplo a continuación de cada una de ellas para que se entienda bien.

a) **Mediana: recta que va desde un vértice al punto medio del lado opuesto.** La intersección de las medianas da un punto que se llama **baricentro**.

b) **Mediatrices** de los lados. La mediatriz se refiere a un segmento formado por dos puntos. Se define **mediatriz de un segmento como la recta perpendicular a dicho segmento y que pasa por su punto medio. Todos sus puntos cumplen la propiedad de equidistar de los extremos del segmento.** La intersección de las mediatrices da un punto que se llama **circuncentro**, pues equidista de los tres vértices y es centro, por lo tanto, de la circunferencia circunscrita al triángulo.

c) **Alturas**: son las **rectas que parten de un vértice y son perpendiculares al lado opuesto.** Su intersección da un punto que se llama **ortocentro**

d) **Bisectrices**. Son **rectas que dividen a cada uno de los ángulos del triángulo en dos partes iguales.** También se pueden definir como el conjunto de puntos que equidistan de dos rectas. Su intersección da un punto que se llama **incentro**, pues es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo. Dadas dos rectas, al formar dos ángulos, también hay dos bisectrices, B_1 y B_2, como se ve en la figura (las bisectrices se han coloreado):



Para calcular sus ecuaciones, algo que no hemos hecho en las demás líneas pues sus ecuaciones son fácilmente deducibles a partir de su definición, vamos a aplicar la condición, como se ha dicho, de que están formadas por puntos que equidistan de las dos rectas. Por lo tanto, vamos a aplicar la fórmula de distancia de punto a recta. Tengamos un punto genérico del plano *P (x,y).*

Su distancia a la recta "r" será:

$$d(P,r) = \left|\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

Su distancia a la recta "s" será:

$$d(P,s) = \left|\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}}\right|$$

E igualando ambas:

$$\left|\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}}\right| \rightarrow$$

Si el valor absoluto de dos números es el mismo hay dos posibilidades: o los números son iguales o los números son opuestos. Por lo tanto:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}}$$

Las dos últimas ecuaciones, una con el signo "más" y la otra con el signo "menos", nos dan las dos ecuaciones de las bisectrices de dos rectas cualquiera. Creemos que no hay que aprenderse esta fórmula sino aplicar la idea a cada problema concreto. Como se demuestra y se ve en la figura, las dos mediatrices son perpendiculares.

ÁREA DEL TRIÁNGULO FORMADO POR TRES PUNTOS

Creemos que lo mejor es hacer un ejemplo con un triángulo determinado y, de paso, calcular también las líneas y puntos especiales de los que hemos hablado.

Ejemplo

Calcular el área del triángulo formado por los puntos A (2,4), B (6,8) y C (-2, 10). Calcular también:

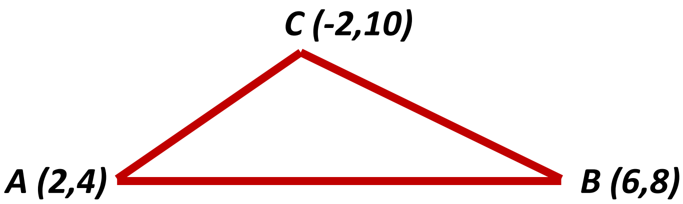
Las medianas y el baricentro

Las alturas y el ortocentro

Las mediatrices y el circuncentro

Las bisectrices y el incentro

ÁREA:



Para calcular el área de un triángulo necesitamos conocer, claramente, una de sus bases y la altura sobre ella. En nuestro caso, vamos a elegir como base el lado AB y la altura sobre ella, que será la distancia del vértice C a la recta AB.

Base: La distancia entre los puntos A y B

$$\boldsymbol{d(AB)} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(6-2, 8-4)| = |(4,4)| = \sqrt{4^2+4^2} = \boldsymbol{4\sqrt{2}\ u}$$

Altura: distancia del vértice C a la recta AB

Para aplicar la fórmula que nos dará esa distancia, necesitamos conocer la ecuación de la recta AB. Para ello, nos hace falta conocer un punto por el que pasa (conocemos dos, ósea que con ello no tenemos problemas) y su vector director. Su vector director creemos que es fácil ver que es el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{cases} A\,(2,4) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4,4) \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{4} \rightarrow \boldsymbol{r \equiv x - y + 2 = 0}$$

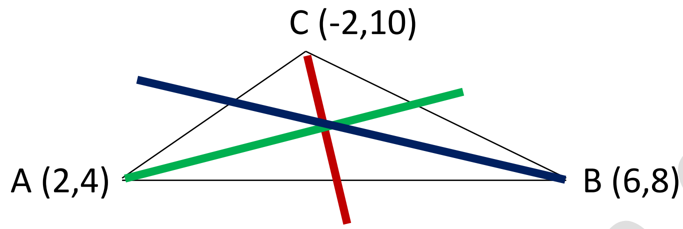
Teniendo ya la ecuación de la recta AB podemos calcular la altura, la distancia de C a dicha recta

$$\boldsymbol{h} = d(C\ r) = \left|\frac{-2-10+2}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| = \boldsymbol{\frac{10}{\sqrt{2}}}$$

Siendo el área:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \frac{10}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{20\ u^2}$$

MEDIANAS Y BARICENTRO

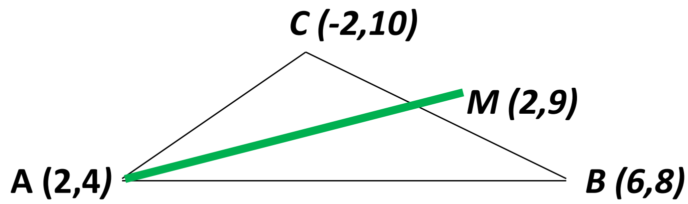


Recordando la definición de mediana, recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto, hemos dibujado las tres de este triángulo en tres colores, como se aprecia. Para calcular el baricentro, con dos de ellas nos es suficiente porque la tercera pasa por el mismo punto. Por ello, vamos a calcular sólo la mediana que parte del vértice A (verde) y la que parte de B (azul). Una vez calculadas, el baricentro será simplemente la intersección de ambas rectas.

Mediana que parte del vértice A, recta "s"

Como para calcular la ecuación de cualquier recta, nos hace falta un punto por el que pasa y un vector director que indique su dirección. Un punto por el que pasa nuestra mediana es claramente el punto A (2,4).

Como, por definición, pasa por el punto medio del lado opuesto vamos a calcularlo, lo hemos llamado M



Recordando la fórmula del punto medio, de primera componente la semisuma de las primeras componentes y de segunda la semisuma de las segundas, tenemos:

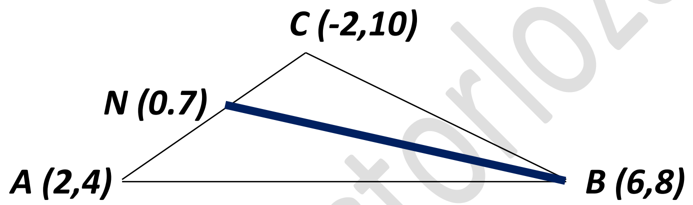
$$M = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{10+8}{2}\right) = (2{,}9)$$

El vector director de la mediana será entonces el vector $\overrightarrow{AM} = (0{,}5)$

$$s \equiv \begin{cases} A(2{,}4) \\ \vec{v} = (0{,}5) \end{cases} \rightarrow s \equiv \frac{x-2}{0} = \frac{y-4}{5} \rightarrow 5(x-2) = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$$

Mediana que parte de B, recta "r"

Como es igual que la anterior, obviamos las explicaciones que son las mismas:



$$N = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{10+4}{2}\right) = (0{,}7)$$

$$r \equiv \begin{cases} B(6{,}8) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BN} = (0-6{,}7-8) = (-6,-1) \end{cases} \rightarrow r \equiv \frac{x-6}{-6} = \frac{y-8}{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boldsymbol{r \equiv -x + 6y - 42 = 0}$$

La tercera mediana se calcularía igual.

Baricentro

Como ya hemos dicho, el baricentro es la intersección de las medianas. Por lo tanto, no tenemos nada más que resolver el sistema de ecuaciones formado por las dos rectas calculadas anteriormente

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{-x + 6y - 42 = 0} \end{cases} \rightarrow -2 + 6y - 42 = 0 \rightarrow y = \frac{22}{3}$$

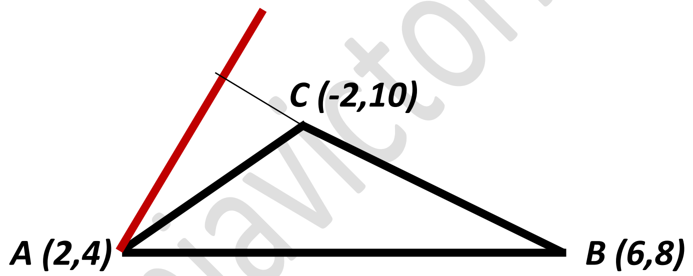
$$B\left(2,\frac{22}{3}\right)$$

ALTURAS Y ORTOCENTRO

Como en el caso anterior, vamos a calcular dos alturas. Su intersección será el ortocentro. La intersección de las dos alturas se resuelve igual que siempre, resolviendo el sistema de ecuaciones formado por ellas. No lo hacemos para no alargar la lección innecesariamente con cosas ya sabidas.

Recordamos que una altura parte de un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

Vamos a calcular primero la altura que parte de A



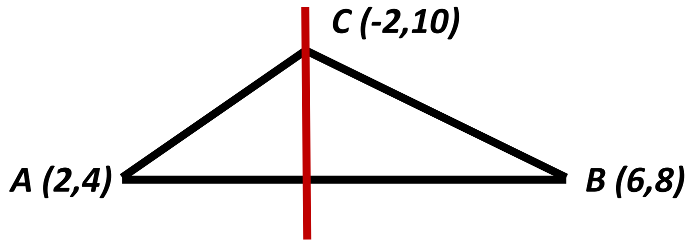
Altura que parte de A, recta "r"

De ella ya conocemos un punto, el vértice A. Tenemos que calcular su vector director. Al igual que hemos hecho con la altura que parte de C para calcular el área, sabemos que su vector director es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC}$. Por lo tanto

$$r \equiv \begin{cases} A\ (2,4) \\ \vec{v} \perp \overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{BC} = (-2-6, 10-8) = (-8,2) \rightarrow \vec{v} = (2,8) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} A\ (2,4) \\ \vec{v} = (2,8) \end{cases} \rightarrow r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{8} \rightarrow \boldsymbol{4x - y - 4 = 0}$$

Altura que parte de C, recta "s"



Pasa por el punto C y su vector director es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (4,4) \rightarrow \vec{v}_s = (4,-4)$$

$$s \equiv \begin{cases} C\ (-2,10) \\ \vec{v} = (4,-4) \end{cases} \rightarrow s \equiv \frac{x+2}{4} = \frac{y-10}{-4} \rightarrow \boldsymbol{-x-y+8=0}$$

El ortocentro es la intersección de ambas alturas (la tercera pasa por el mismo sitio)

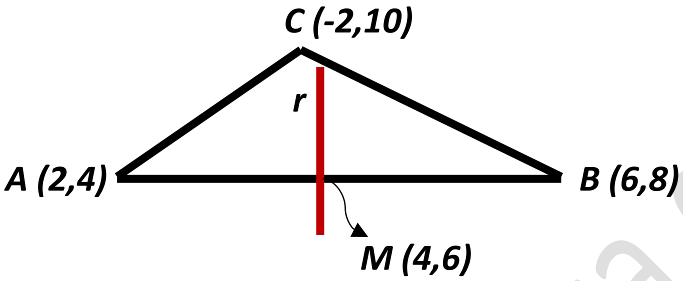
$$\begin{cases} \boldsymbol{4x-y-4=0} \\ \boldsymbol{-x-y+8=0} \end{cases}$$

Sistema que, como hemos dicho, no resolvemos puesto que se ha hecho varias veces en otros casos.

MEDIATRICES Y CIRCUNCENTRO

La mediatriz de un segmento pasa por su punto medio y es perpendicular al segmento. Como en los casos anteriores, vamos a calcular dos de ellas y su intersección será el circuncentro.

Mediatriz del segmento AB, recta "r"

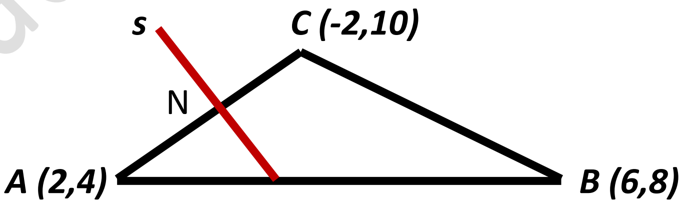


El punto medio, M (4,6), tiene de componentes las semisumas de las componentes de los puntos A y B (si, nos repetimos como la cebolla). Dado que, por definición, la mediatriz es perpendicular al segmento AB, su vector será perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (4,4) \rightarrow \vec{v} = (4,-4)$$

$$r \equiv \begin{cases} M\ (4,6) \\ \vec{v} = (4,-4) \end{cases} \rightarrow r \equiv \frac{x-4}{4} = \frac{y-6}{-4} \rightarrow \boldsymbol{-x - y + 10 = 0}$$

Mediatriz del segmento AC, recta "s"



El punto medio N tiene por coordenadas N (0,7). El vector de la recta "s" es perpendicular al vector $\overrightarrow{AC} = (-4,6)$. Por lo tanto, el vector de la mediatriz "s" es $\vec{v} = (6,4)$. La recta es

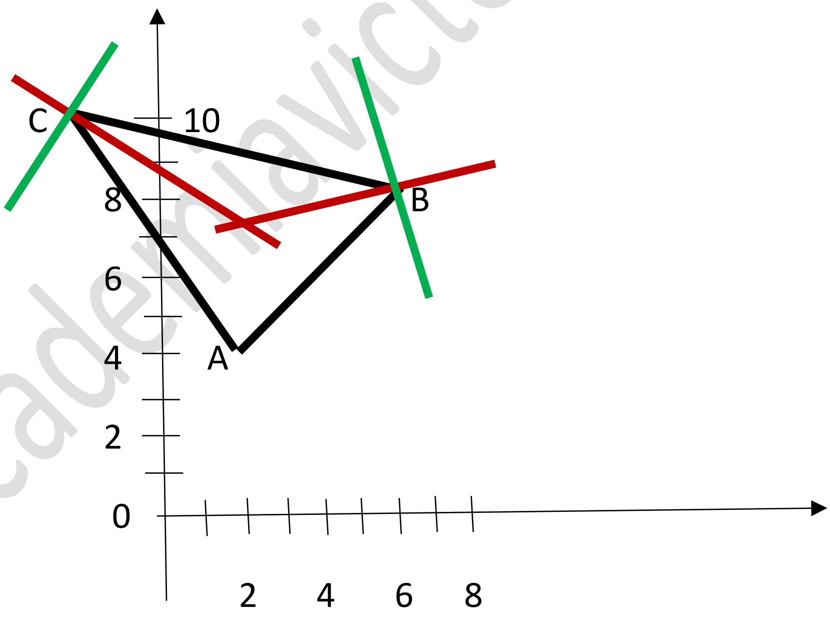
$$s \equiv \frac{x-0}{6} = \frac{y-7}{4} \rightarrow 4x - 6y + 42 = 0 \rightarrow \boldsymbol{2x - 3y + 21 = 0}$$

El circuncentro, centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices ya que equidista de los tres, es la intersección de ambas rectas

$$\begin{cases} -x - y + 10 = 0 \\ 2x - 3y + 21 = 0 \end{cases}$$

BISECTRICES E INCENTRO

El cálculo de las bisectrices y del incentro es un poco pesado, bastante más que los casos anteriores. No nos parece muy interesante, pero por rigor hemos de hacerlo. Para empezar, ahora sí que nos interesa dibujar bien los puntos. Hemos dicho que por cada par de rectas hay dos bisectrices y para hallar el incentro, **tenemos que saber elegir entre ellas**. Eso lo hacemos, como decimos y veremos, dibujando "bien" los puntos en un sistema cartesiano.



Al calcular las bisectrices de las rectas AC y CB nos saldrán dos, la roja y la verde. La roja es la que nos interesa para calcular el incentro. La elegiremos porque, como vemos en la figura, es una recta decreciente y, por lo tanto, su pendiente será negativa. La bisectriz verde, por el contrario, tiene una pendiente positiva por ser creciente. Lo mismo decimos de las bisectrices de las rectas CB y AB. Elegiremos la roja que, en este caso, es creciente y tiene pendiente positiva. **Una vez hecha esta aclaración fundamental,** pasamos a calcularlas según las fórmulas que se han dado.

Para aplicar la fórmula de las bisectrices de dos rectas tenemos que calcular las ecuaciones de esas rectas. Veamos

A (2,4)   B (6,8)   C (-2,10)

Recta AB

$$\boldsymbol{r_{AB}}\begin{cases} A\,(2,4) \\ \vec{v}_{AB} = \overrightarrow{AB} = (6-2, 8-4) = (4,4) \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{4} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{r_{AB} \equiv x - y + 2 = 0}$$

Recta AC

$$r_{AC}\begin{cases} A\,(2,4) \\ \vec{v}_{AC} = (-4,6) \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{-4} = \frac{y-4}{6} \rightarrow 6x + 4y - 28 = 0 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{r_{AC} \equiv 3x + 2y - 14 = 0}$$

Recta BC

$$r_{BC}\begin{cases} B\,(6,8) \\ \vec{v}_{BC} = (-8,2) \end{cases} \rightarrow \frac{x-6}{-8} = \frac{y-8}{2} \rightarrow 2x + 8y - 76 = 0 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{r_{BC} \equiv x + 4y - 38 = 0}$$

Mediatrices de las rectas AC y BC

$$r_{AC} \equiv 3x + 2y - 14 = 0$$

$$r_{BC} \equiv x + 4y - 38 = 0$$

Aplicando la fórmula

$$\left|\frac{3x + 2y - 14}{\sqrt{3^2 + 2^2}}\right| = \left|\frac{x + 4y - 38}{\sqrt{1^2 + 4^2}}\right| \rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x+2y-14}{\sqrt{13}} = \dfrac{x+4y-38}{\sqrt{17}} & (1) \\ \dfrac{3x+2y-14}{\sqrt{13}} = -\dfrac{x+4y-38}{\sqrt{17}} & (2) \end{cases}$$

Estudiamos cada una de las ecuaciones (1) y (2) para deducir, como hemos comentado, cuál de ellas tiene pendiente negativa, bisectriz roja en el dibujo. Para ello despejamos *"y",* ya que sabemos que la pendiente es el coeficiente de *"x"*

$$(1)\ \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}}(3x+2y-14) = x+4y-38 \rightarrow$$

$$2\sqrt{\frac{17}{13}}y - 4y = x - 3\sqrt{\frac{17}{13}}x - 38 + 14\sqrt{\frac{17}{13}} \rightarrow$$

Sacando factor común y despejando "y"

$$y = \frac{\mathbf{1 - 3\sqrt{\frac{17}{13}}}}{\mathbf{2\sqrt{\frac{17}{13}} - 4}}x + \cdots.$$

La pendiente de esta recta es el factor que multiplica a "x" y está en negrita. Su valor es aproximadamente 1.42, por lo tanto, es positiva. La bisectriz que nos interesa, entonces, es la que representa la ecuación (2) de pendiente negativa.

Ya tenemos una de las bisectrices "rojas" que son las que nos van a permitir calcular el incentro.

La otra bisectriz es la que pertenece a las rectas ***CB Y BA***, cuya pendiente es positiva, la roja en el dibujo. Se hace igual y, aparte de no alargar innecesariamente la lección, creemos que es bueno que lo acabe el lector o lectora. Dejamos aquí la figura