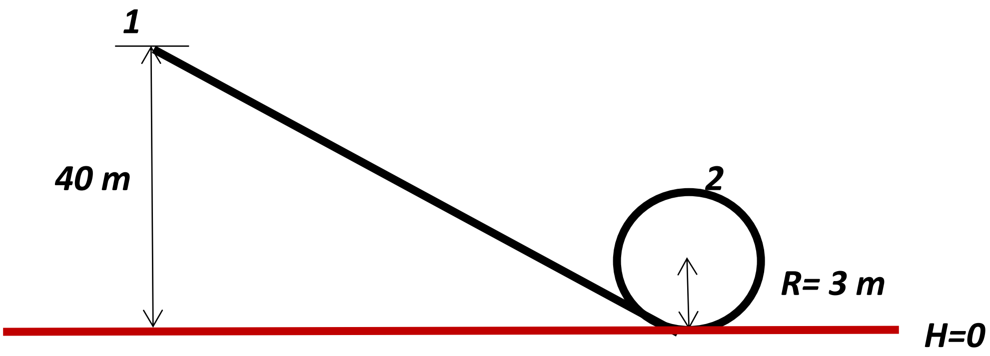
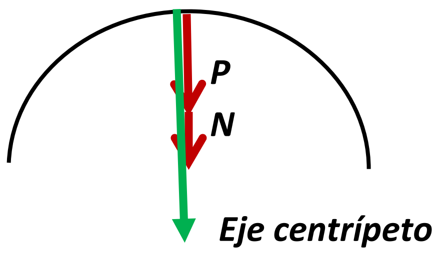
Ejemplo 1

Un cuerpo de 35 Kg se deja caer por un plano inclinado 30 grados desde una altura de 40 metros que acaba en una circunferencia de 3 metros de radio sin rozamiento, según indica la figura. Calcular la normal en el punto más alto de la circunferencia,2, sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico con el plano inclinado es 0,1.



Como nos preguntan la normal en el punto **2,** aplicamos las leyes de Newton a esta rotación:

Diagrama de fuerzas



Descomposición sobre eje normal

Las dos fuerzas van ya sobre el eje centrípeto

Aplicación de las leyes

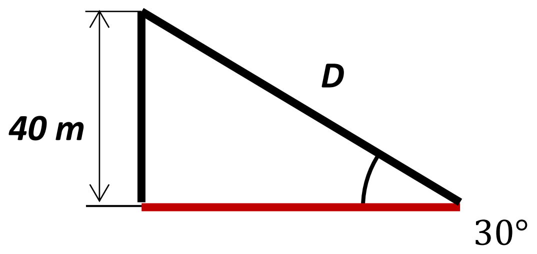
$$\sum F_c = m\frac{v^2}{R} \rightarrow P + N = m\frac{v^2}{R} \rightarrow 350 + N = 35\frac{v^2}{3} \rightarrow \boldsymbol{N} = \boldsymbol{\frac{35}{3}v^2 - 350(1)}$$

Como vemos en la última expresión, para deducir el valor de la normal nos hace falta conocer la velocidad en ese punto y para ello el teorema de la energía suele servir. Lo vamos a aplicar entre el punto ***1*** y el punto ***2***.

$$\boldsymbol{W_{NC} = \Delta E_M}$$

Las fuerzas no conservativas aquí son la normal y la fuerza de rozamiento, ésta última actúa sólo en la rampa. **El trabajo de la normal es cero pues es perpendicular al desplazamiento.**

$$f_r = \mu_d N = \mu_d mgcos30 = 0{,}1 \cdot 350 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17{,}5\sqrt{3}$$



$$40 = Dsen30 \rightarrow D = 80$$

Ya estamos en condiciones de calcular el trabajo de las fuerzas no conservativas entre los puntos 1 y 2. Como en la circunferencia no hay rozamiento el trabajo de éste se calcula sólo en la rampa

$$\boldsymbol{W_{nc}} = W_{fr} + W_N = |W_N = 0| = W_{fr} = f_r Dcos180 = \boldsymbol{17{,}5\sqrt{3} \cdot 80 \cdot (-1)}$$

$$\Delta E_m = \begin{cases} \boldsymbol{E_{m1}} = mgh = \mathbf{350 \cdot 40} \\ \boldsymbol{E_{m2}} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \mathbf{350 \cdot 6} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{35}\boldsymbol{v^2} \end{cases}$$

Y aplicando el teorema:

$$\boldsymbol{W_{NC} = E_{m2} - E_{m1}}$$

$$350 \cdot 6 + \frac{35}{2}v^2 - 350 \cdot 40 = -80 \cdot 17{,}5\sqrt{3}$$

De donde $\boldsymbol{v = 23,27\ {}^{m}/_{s}}$

Llevando este resultado a la ecuación (1)

$$\boldsymbol{N = \frac{35}{3}v^2 - 350 \cong 5966,75\ N}$$

Ejemplo 2

En el problema anterior calcular la altura mínima a la que debemos dejar car el cuerpo para que complete la vuelta en el rizo.

Como ya sabemos por otros problemas, para que el cuerpo no se despegue la normal ha de tomar valores positivos o nulo. Como la normal depende de la velocidad, para que eso ocurra la velocidad ha de cumplir

$$P + N = m\frac{v^2}{R} \rightarrow N = \boldsymbol{m\frac{v^2}{R} - mg \geq 0} \rightarrow v \geq \sqrt{Rg} \cong \sqrt{30} \cong 5{,}48\ {}^{m}/_{s}$$

Vamos ahora a calcular la velocidad en ese punto en función de la altura de la que se deja caer.

$$W_{nc} = W_{fr} = |h = Dsen30 \rightarrow D = 2h| = 17{,}5\sqrt{3} \cdot 2h \cdot cos180 = -35\sqrt{3}h$$

$$\Delta E_m = \begin{cases} E_{m1} = mgh = 350 \cdot h \\ E_{m2} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = 350 \cdot 6 + \frac{1}{2}35v^2 \end{cases}$$

Y aplicando el teorema:

$$W_{nc} = \Delta E_m \rightarrow 350 \cdot 6 + \frac{35}{2} v^2 - 350h = -35\sqrt{3}h \rightarrow$$

$$\boldsymbol{v^2 = \left(350 - 35\sqrt{3}\right)h - 2100}$$

Pero, como hemos deducido al principio, para que la normal sea positiva o cero se debe de cumplir $v^2 \geq 30$. Por lo tanto:

$$\left(350 - 35\sqrt{3}\right)h - 2100 \geq 30 \rightarrow$$

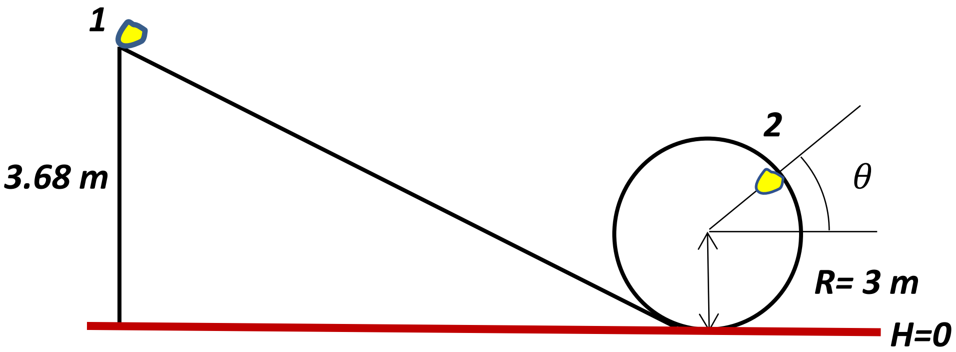
$$\rightarrow \boldsymbol{h \geq 7,36\ m}$$

Podíamos también haber trabajado sin inecuaciones, aplicando el teorema con la velocidad en ***2*** conocida, la mínima***.*** La altura sería la incógnita de la ecuación.

Ejemplo 3

Teniendo en cuenta el problema dos, calcular el punto de la circunferencia en el que se despega si se suelta desde la mitad de la altura calculada.

Insistimos que, para saber dónde un cuerpo se despega de la superficie de apoyo, hay que calcular el valor de la normal en función de la posición para ver cuando se hace cero. Por eso vamos a calcular la normal **en un punto genérico** $\mathbf{2}$ de la semicircunferencia superior (que es donde se puede caer) definido por el parámetro θ.



Donde

$$H = \frac{7.36}{2} = 3.68\,m$$

Y, de los cálculos en los dos problemas anteriores, sabemos:

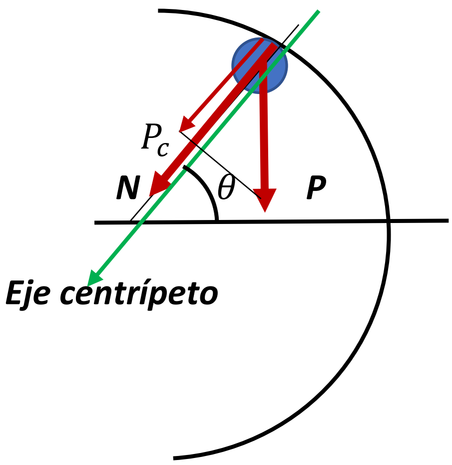
$$f_r = 17{,}5\sqrt{3}$$

En la rampa. El ángulo de la rampa es de ***30*** grados.

Para calcular el valor de la normal en el punto 2 aplicamos las leyes de Newton a esa rotación:

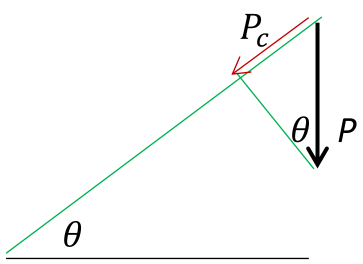
Fuerzas y descomposición sobre eje centrípeto:

.



$$P_c = Psen\theta = 350sen\theta$$

Aclaración sobre la descomposición:



Las líneas marcadas con el mismo color (negro y verde) son perpendiculares a las dos que forman θ grados del mismo color. Por lo tanto, ellas también forman el mismo ángulo y de ahí que la componente centrípeta del peso tenga esa expresión.

Aplicación de las leyes:

$$\sum \boldsymbol{F_c} = \boldsymbol{m}\frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{R}} \to N + 350sen\theta = 35\frac{v^2}{3} \to$$

$$\boldsymbol{N = \frac{35}{3}v^2 - 350sen\theta} \ \ (1)$$

Como vemos, la normal depende de la velocidad. Para calcular dicha velocidad, como ya empezamos a repetir bastante, utilizamos el teorema del trabajo. Entre ***1 y 2.***

$$W_{nc} = W_{fr} + W_N = |D = 3{,}68 \cdot 2 = 7{,}36|$$
$$= 17{,}5\sqrt{3} \cdot 7{,}36 \cdot cos180 + 0 \cong -223{,}10$$

$$\Delta E_m = \begin{cases} E_{m1} = mgh = 350 \cdot 3{,}68 \\ E_{m2} = \frac{1}{2}35v^2 + 350(3 + 3sen\theta) \end{cases}$$

Y aplicando el teorema:

$$\frac{1}{2}35v^2 + 350 \cdot 3(1 + sen\theta) - 350 \cdot 3{,}68 = -223{,}10 \to$$
$$v^2 = 0{,}85 - 20sen\theta$$

Quedando la normal, sustituyendo en ***(1)***:

$$N = \frac{35}{3}(0{,}85 - 20sen\theta) - 350sen\theta$$
$$\boldsymbol{N = 9{,}92 - 583{,}33sen\theta}$$

Y aplicando la restricción $N \geq 0$

$$9{,}92 - 583{,}33sen\theta \geq 0 \to sen\theta \leq 0{,}017 \to \boldsymbol{\theta \leq 0{,}97º}$$