victor loza
ACADEMIA ONLINE

CÁLCULO DE LÍMITES

Como ya hemos comentado en la lección anterior, una vez conocidas las indeterminaciones pasamos a ver como se resuelven cada una de las cuatro que tenemos.

INDETERMINACIÓN 0/0

En este primer nivel este tipo de indeterminación nos parecerá bajo dos situaciones:

PRIMERA SITUACIÓN*: cociente de polinomios*

En la primera lección de límites ya hemos visto este ejemplo. Cuando ocurra esto **DESCOMPONDREMOS SIEMPRE EL NUMERADOR Y EL DENOMINADOR POR RUFFINI O CALCULANDO SUS RAICES** y, por el teorema del resto (que no es necesario recordar**), aparecerán monomios iguales en el numerador y en el denominador que simplificando nos llevará a la solución.**

Ejemplo 1:

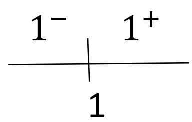
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=\frac{-1}{4}$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=\left(\frac{2}{0}\right)=\pm\infty?$$

Donde la última expresión es la división del número dos, **mejor sería decir un número que se acerca a dos, entre un número muy pequeño que se acerca a cero. El resultado, como hemos visto en la lección 2**, es un número muy grande pero que no sabemos si es positivo o negativo, no sabemos si tiende a más o a menos infinito. Por ello, **CUANDO NOS QUEDE UN NÚMERO DIVIDIDO ENTRE CERO (algo que tiende a cero) ES OBLIGATORIO HACER LOS LÍMITES LATERALES:**

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$



$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

En ellos nos hemos acercado a uno, pero por la derecha $\mathbf{1^+}$, y, como se ve en la figura de la derecha, **x es un poco mayor que uno**, quedando **la resta *(x-1)* muy pequeña pero positiva y lo denotamos por $\mathbf{0^+}$.** Análogamente, cuando la variable x tiende a uno por la izquierda, **"x" es un poco más pequeña que uno** (figura otra vez de la derecha) y por lo tanto **la resta *(x-1)* es muy pequeña pero negativa y lo denotamos por $\mathbf{0^-}$.**

SEGUNDA SITUACIÓN. ***Cociente con resta de raíces cuadradas***

Suele funcionar bien multiplicar y dividir por el conjugado de esa resta:

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+\sqrt{x}}=\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$$

Donde hemos simplificado los números (1-x) y (x-1) cuyo cociente da siempre -1. Comentamos que no conviene hacer las operaciones del denominador $(x-1)(1+\sqrt{x})$ porque ya no podríamos simplificar el monomio ***(x-1).***

INDETERMINACIÓN $\frac{\infty}{\infty}$

Se puede resolver de varias maneras, pero aquí vamos a elegir la que nos parece más sencilla.

Fijémonos en un polinomio cualquiera, por ejemplo

$$P(x)=3x^2-x+2$$

Vamos a darle a "x" un valor muy grande, por ejemplo

$$x=10^{10}\rightarrow\begin{cases}3x^2=3\cdot(10^{10})^2=3\cdot 10^{20}\\ -x=-10^{10}\\ 2=2\end{cases}$$

Tenemos que ver que el término de mayor grado, $3\cdot x^2$, toma un valor muchísimo más grande que los demás términos y, por lo tanto, los podemos despreciar frente a él. Entonces, **CUANDO "X" TIENDE A INFINITO, UN POLINOMIO ES EQUIVALENTE AL TÉRMINO DE MAYOR GRADO Y LO SUSTITUIREMOS POR ÉL.** Con esta regla, estos límites creemos que son de los más sencillos

Ejemplo 3

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x + 2}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Ejemplo 4

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + x + 3}{3x^3 + x^2 - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2}{3x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{3x} = \frac{4}{\infty} = 0$$

Ejemplo 5

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + x + 3}{3x^2 + x - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3}{3x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{3} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

Fijándonos en los tres ejercicios anteriores, cuando se trate de esta indeterminación y tengamos un cociente de polinomios, podemos decir como atajo las siguientes tres reglas:

Si los grados del numerador y denominador coinciden (son entonces números "parecidos") **el resultado del límite es el cociente de los coeficientes de las "equis" de mayor grado (ejemplo 3)**

Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador (el número del numerador es entonces mucho más grande que el del denominador) **el resultado del límite es infinito o menos infinito, según el cociente de signos:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x + 1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x + 1}{x^2} = = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Si el grado del numerador es menor que el del denominador (el número del numerador es entonces mucho más pequeño que el del denominador) **el resultado del límite es cero**.

Insistimos, estas tres recetillas sólo sirven para el cociente de polinomios y en el caso de que "x" tienda a infinito y tengamos el cociente indeterminado infinito entre infinito.

INDETERMINACIÓN $\infty - \infty$

En esta indeterminación multiplicamos y dividimos por el conjugado $\infty + \infty$

Ejemplo 6

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[2]{x^2 + x - 2} - \sqrt[2]{x^2 + 1} = (\infty - \infty) =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt[2]{x^2 + x - 2} - \sqrt[2]{x^2 + 1}\,\right)\left(\sqrt[2]{x^2 + x - 2} + \sqrt[2]{x^2 + 1}\right)}{\left(\sqrt[2]{x^2 + x - 2} + \sqrt[2]{x^2 + 1}\right)} =$$

En el numerador nos ha quedado el producto "suma por diferencia", el producto "notable", por lo tanto, es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo. Entonces desaparecen las raíces, por eso se hace así.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x-2)-(x^2+1)}{(\sqrt[2]{x^2+x-2}+\sqrt[2]{x^2+1})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{(\sqrt[2]{x^2+x-2}+\sqrt[2]{x^2+1})}$$

Como vemos, después de multiplicar y dividir por el conjugado, nos ha quedado una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ por lo que **el siguiente paso es sustituir cada polinomio por su equivalente**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{(\sqrt[2]{x^2+x-2}+\sqrt[2]{x^2+1})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+x} = \frac{x}{2x} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

INDETERMINACIÓN $\mathbf{1^{\infty}}$

En este tipo de indeterminación nos aparecerá una función exponencial. Como en todos los límites, lo primero que estudiaremos es si está indeterminado. **En este caso, haremos siempre primero el límite de la base por un lado y el límite del exponente por otro**. **Sólo si el límite de la base es uno y el límite del exponente es infinito haremos uso de una fórmula**. No nos gusta nada que esta indeterminación se de en este curso, por eso vamos a dar la siguiente fórmula que nos servirá para no complicar de una manera "absurda" la resolución.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = (1^{\infty}) =}$$

$$\boldsymbol{= e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot[f(x)-1]}}$$

Una vez aplicada, nos preocuparemos del límite que aparece como exponente del número "e"

Ejemplo 7

Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}=\begin{cases} base:\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1 \\ \lim_{x\to\infty}2x=\infty \end{cases}\to \mathbf{1}^{\infty}$$

Como el límite de la base es uno y el del exponente infinito, estamos ante la interminación 1^{∞} aplicamos la fórmula

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)}$$

Resolvemos, como decimos, el límite del exponente:

$$\lim_{x\to\infty}2x\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)=\lim_{x\to\infty}2x\frac{2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x}=4$$

No nos olvidamos de que este es el límite del exponente que aparece en la fórmula. Volvemos

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}=e^{4}}$$

Ejemplo 8

Calcular el siguiente límite

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{2x}}$$

Calculamos el límite de la base y el límite del exponente.

Base:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Exponente:

$$\lim_{x\to\infty} 2x = \infty$$

NO ES DE LA FORMA 1^{∞}. POR ELLO, NO APLICAMOS LA FÓRMULA PORQUE NO ES NECESARIO, NO ESTÁ INDETERMINADO.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{2x} = 2^{\infty} = \infty$$