victor loza
ACADEMIA ONLINE

IDENTIDADES

Se trata de demostrar que una ecuación es cierta siempre, para cualquier valor del ángulo.

La más importante, por ejemplo, es $\boldsymbol{sen^2x + cos^2x = 1}$. **Como regla general suele funcionar coger cada miembro de la ecuación por separado y simplificarlos en senos y cosenos. Veamos**

Ejemplo 1.

Demostrar la siguiente identidad

$$\boldsymbol{sec^2\alpha + cosec^2\alpha = sec^2\alpha \cdot cosec^2\alpha}$$

Coger uno de los miembros e intentar llegar al otro suele ser complicado. Creemos que es mucho más fácil, como se ha dicho, coger cada miembro por separado y simplificar todo lo que se pueda en senos y cosenos. Veremos entonces que ambas expresiones son iguales a una tercera.

Miembro izquierdo

$$sec^2\alpha + cosec^2\alpha = \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sen^2x} = \frac{sen^2x + cos^2x}{cos^2xsen^2x} = \boldsymbol{\frac{1}{cos^2xsen^2x}}$$

Saber dónde pararse no tiene una regla general. En este caso nos ha aparecido una fracción muy sencilla y con todos productos. La dejamos ahí, siempre habrá tiempo de seguir operando.

Miembro derecho

$$sec^2\alpha \cdot cosec^2\alpha = \frac{1}{cos^2x} \cdot \frac{1}{sen^2x} = \boldsymbol{\frac{1}{cos^2xsen^2x}}$$

Y observamos lo que se quería demostrar, pues **ambas cosas son iguales a una tercera y, por lo tanto, son iguales entre sí.**

Ejemplo 2.

Demostrar la siguiente identidad

$$(\boldsymbol{senx + cosx})^{\mathbf{2}} = \mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{tgx} \cdot \boldsymbol{cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$$

Miembro Izquierdo

$$(\boldsymbol{senx + cosx})^{\mathbf{2}} = \underline{sen^2x + cos^2x} + 2senxcosx = \mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{senxcosx}$$

Miembro derecho

$$\mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{tgx} \cdot \boldsymbol{cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} = 1 + 2\frac{senx}{cosx}cos^2x = \mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{senxcosx}$$

ECUACIONES

Al contrario que en el caso anterior, ahora tenemos que deducir el ángulo, más bien los ángulos, que satisfacen cierta igualdad, cierta ecuación. **No hay reglas generales, pero suele funcionar pasar todo a senos y cosenos y del mismo ángulo si aparecieran distintos ángulos $\alpha, 2\alpha$, por ejemplo.** Se trata de poder despejar y calcular una única razón trigonométrica y a partir de ella calcular el ángulo o los ángulos solución. Para esto y otros problemas conviene saberse las razones trigonométricas de los ángulos más típicos, 30, 45 y 60:

	30	**45**	**60**
Seno	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
Tangente	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$

Obsérvese la secuencia de formación de los senos y de los cosenos, es muy fácil aprendérsela de memoria.

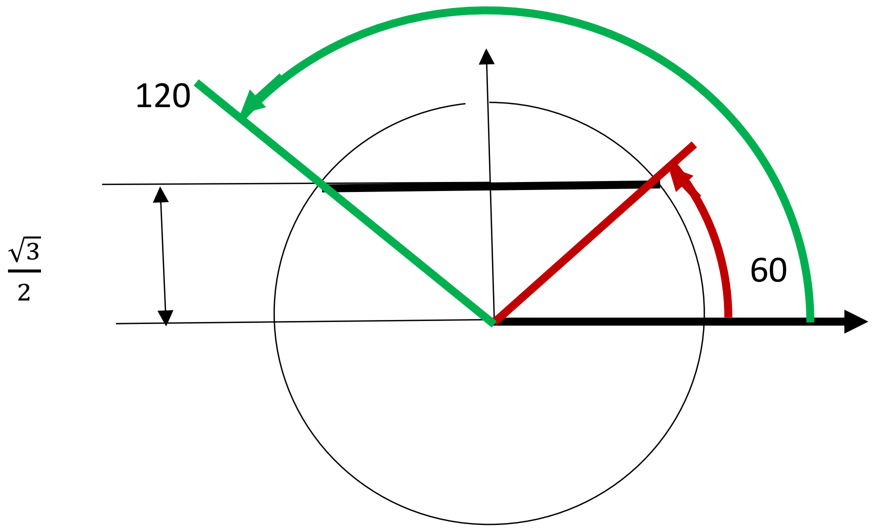
Ejemplo 1.

Resolver la ecuación

$$senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esta es de las más sencillas pues ya tenemos despejada una razón trigonométrica, simplemente tenemos que preguntarnos qué ángulos tienen este seno, y este es muy conocido (suelen salir ángulos cuyas razones trigonométricas son muy típicas). Uno de los ángulos cuyo seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es el de $60°$ como vemos en la tabla. Pero no olvidar que posiblemente no sea el único ángulo cuyo seno tiene ese valor, la función seno NO ES INYECTIVA, y un mismo valor de la imagen se alcanza para varios valores de la variable. Para verlo dibujamos:

Dado que los senos representan las alturas, marcamos la altura de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sobre el eje Y. Observamos entonces que, efectivamente, hay dos puntos sobre la circunferencia que están a esa altura. Por lo tanto, **hay dos ángulos cuyo seno toma ese valor en la primera vuelta.** El ángulo de 60 grados ya lo sabemos por la tabla (también le podemos preguntar a la calculadora, claro). El otro es el de 120 grados, valor que se deduce fácilmente de la figura.



Estas son las dos soluciones en la primera vuelta, pero **también serían solución todos los que resulten de sumarles a estos dos ángulos vueltas enteras** (360+60 ocupa la misma posición que 60 y tendrá por lo tanto las mismas razones trigonométricas). Concluimos dando las siguientes soluciones

$$senx = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 60 + 360 \cdot k \\ x = 120 + 360 \cdot k \end{cases} \quad En\, radianes: \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

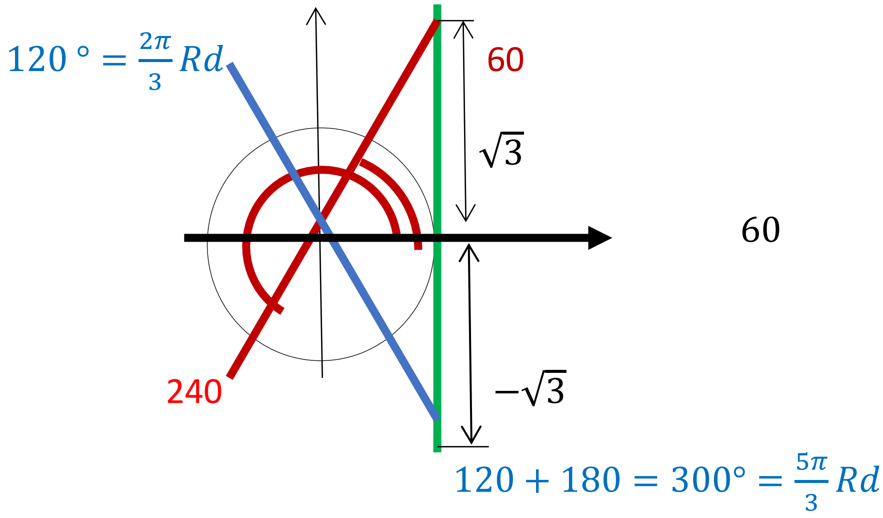
Donde k representa un número entero (podemos girar en los dos sentidos)

Ejemplo 2.

Resolver la siguiente ecuación

$$tg\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

Aquí también tenemos ya despejada una razón trigonométrica, por lo que la parte del cálculo ya está hecha. Ahora tenemos que resolver viendo qué ángulos tienen esa tangente. Según vemos en la tabla, hay un ángulo, el de 60, que tiene la tangente igual a $\sqrt{3}$. Vamos a dibujar la circunferencia goniométrica para deducir qué otros ángulos tienen la misma tangente y, a partir de ellos, cuales la tienen igual a $-\sqrt{3}$. Recordamos que la línea de las tangentes es vertical y tangente a la circunferencia en su extremo derecho, remarcada en verde en la figura.



Como vemos hay dos ángulos, en rojo, cuya tangente es $\sqrt{3}$, que es la que nos viene en la tabla, uno es el de 60, que ya sabíamos, y el otro 60 +180=240 como se ve en la figura. **LOS ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 180 GRADOS TIENEN LA MISMA TANGENTE**.

Pero nosotros queremos saber qué ángulos tienen la tangente igual a $-\sqrt{3}$ y NO $\sqrt{3}$. Creemos que en la figura es fácil ver que esos ángulos son los que están marcados en azul de valor *360-60=**300*** uno, y *180-60=**120*** el otro. Por lo tanto, diremos:

$$tg\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$
$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{2x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi} \\ \boldsymbol{2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi} \end{cases}$$

Hemos trabajado en radianes, fijarse que las soluciones eran ***120*** y ***300*** en grados sexagesimales y que en radianes son $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$ respectivamente. Un detalle importante es que **el número entero de vueltas $2k\pi$ se suma desde el inicio, antes de despejar la "x". NO se despeja primero la "x" y después se añaden las vueltas ¡OJO!**

Ejemplo 3.

Resolver la siguiente ecuación

$$5secx - 4cosx = 8$$

En esta ecuación no tenemos una R.T. despejada y eso es entonces lo que tenemos que intentar hacer. Para ello, como regla general, **pondremos todo en función de senos y cosenos del mismo ángulo**. Si aparecieran distintos ángulos (en nuestro caso, el único ángulo que aparece es "x") deberíamos hacer primero, aplicando las fórmulas que hemos dado en la lección anterior, que apareciera el mismo. **En un segundo paso haremos aparecer SÓLO senos o SÓLO cosenos para, por último, despejar**.

$$5\frac{1}{cosx} - 4cosx = 8$$

En este caso ha sido corto, ya tenemos todo en cosenos (otro problema puede ser más largo, pero no más difícil). Ahora lo despejamos aplicando lo que haríamos en cualquier ecuación

$$5\frac{1}{cosx} - 4cosx = 8 \rightarrow |\times cosx\,| \rightarrow 5 - 4cos^2x = 8cosx$$
$$\rightarrow -4cos^2x - 8cosx + 5 = 0$$

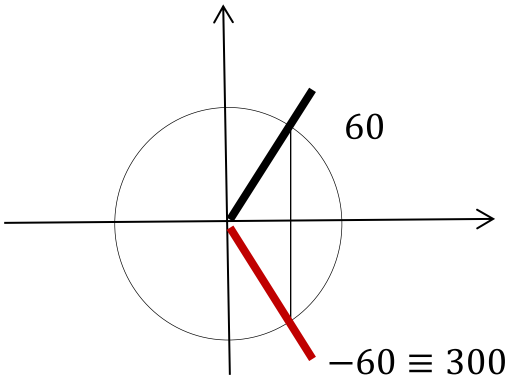
$$-4cos^2x - 8cosx + 5 = 0 \rightarrow cosx = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(-4)5}}{-8} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{-8}$$

$$cosx = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{-8} = \frac{8 \pm 12}{-8} = \begin{cases} cosx = -\frac{5}{2} \rightarrow \nexists x \\ cosx = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La primera solución no nos vale porque no hay ningún ángulo cuyo coseno valga $-\frac{5}{2}$ pues, por definición, $-1 < cosx < 1$

La segunda solución:

Sabemos que $cos60 = \frac{1}{2}$ pero, según vemos en la figura, hay otro ángulo cuya anchura, cuyo coseno, es ½ y que marcamos en rojo. Su valor es claramente 300 (o -60)



Por lo tanto, las soluciones a la ecuación son:

$$\boldsymbol{x = \begin{cases} 60 + 360k = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ -60 + 360k = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}}$$

Por último, **COMPROBAR SIEMPRE LAS SOLUCIONES**, aunque en nuestro caso, al no haber elevado al cuadrado, casi seguro que son válidas las dos.

Ángulo de *60*:

$$5\frac{1}{cosx} - 4cosx = 8 \rightarrow 5 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

Hemos llegado a una identidad, por lo tanto ***60*** es solución.

Ángulo de *300*:

Sustituimos y vemos que se cumple**. Las dos soluciones son válidas**.

Ejemplo 4

Resolver la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{cos2x = senx}$$

En este caso, la técnica general es la misma pero como aparecen distintos ángulos, x y $2x$ habrá primero que pasar todo al mismo ángulo, ***x,*** como hemos advertido ya en comentarios anteriores.

$$cos2x = cos^2x - sen^2x \rightarrow$$

Sustituyendo en la ecuación dada, y poniendo todo en función de senos, nos queda:

$$\boldsymbol{cos^2x - sen^2x = senx} \rightarrow |cos^2x = 1 - sen^2x| \rightarrow$$

$$1 - sen^2x - sen^2x = senx \rightarrow$$

$$\boldsymbol{-2sen^2x - senx + 1 = 0}$$

Ecuación de segundo grado en la incógnita $senx$. Resolviendo:

$$senx = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{-4} = \frac{1 \pm 3}{-4} \rightarrow \begin{cases} senx = -1 \rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ senx = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 30 + 360k \\ x = 150 + 360k \end{cases} \end{cases}$$

Donde para poner las soluciones se han seguido las técnicas de los ejercicios anteriores. Después habría que comprobar cuáles son válidas como se ha hecho en ejercicios anteriores.