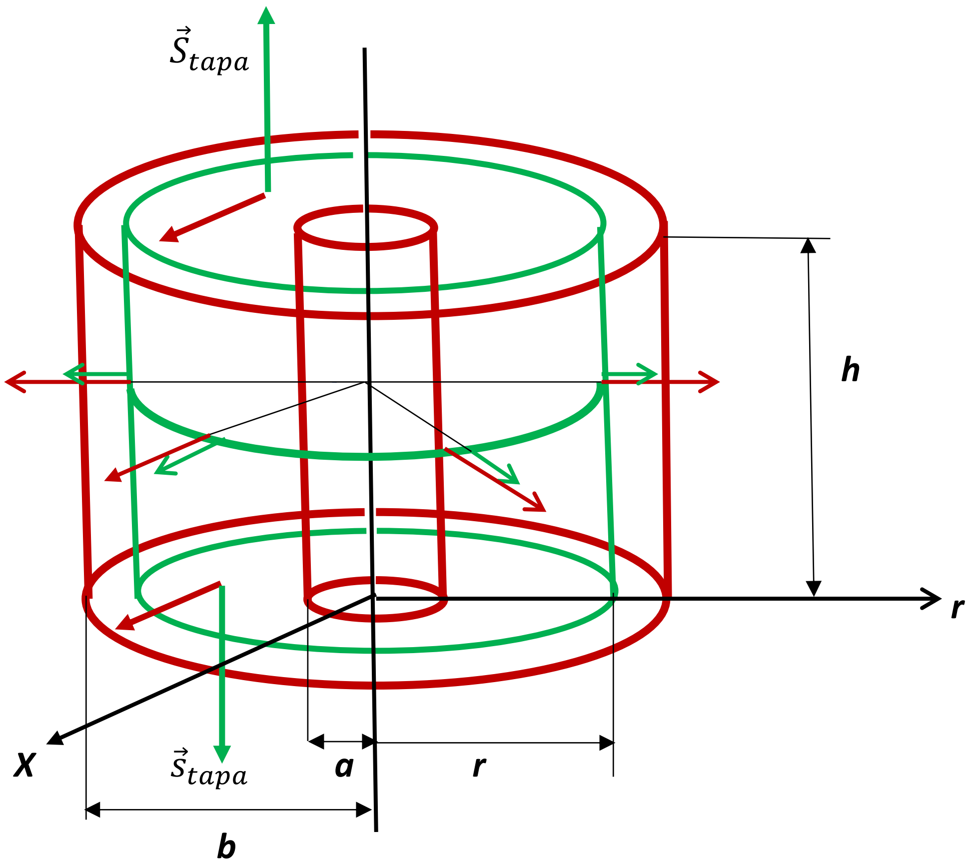
Ejemplo 5

Una corteza dieléctrica cilíndrica infinita de radio interior "a" y radio exterior "b" está cargada con una densidad de carga proporcional al cuadrado de la distancia al eje $\sigma = D \cdot r^2 \; C/_{m^3}$, donde D es una constante. Calcular el campo eléctrico en los puntos de su interior y la diferencia de potencial entre dos de sus puntos.

CÁLCULO DEL CAMPO

Dibujamos la frontera de la corteza con dos cilindros en rojo. La carga llena todo el volumen entre ambos cilindros puesto que, como se dice en el enunciado, es dieléctrica y de densidad de carga por unidad de volumen dada.

$a < r < b$



Hemos elegido la superficie gaussiana marcada en verde, un cilindro de radio ***r*** con sus tapas.

En la superficie lateral del cilindro que representa a la superficie gaussiana, el campo eléctrico está dibujado en rojo sobre el semicírculo verde central, son vectores paralelos al plano Xr y perpendiculares a ella en cada punto, los vectores superficie están dibujados en cada punto de esa superficie en verde, al lado de los vectores campo en esos puntos y ambos forman cero grados. La carga está entre los cilindros de radio "a" y "b" y se prolonga indefinidamente hacia arriba y hacia abajo por lo que el campo eléctrico no "puede apuntar ni hacia arriba ni hacia abajo".

En las tapas de este cilindro gaussiano el flujo es cero pues el vector superficie, en verde, es vertical en la dirección del eje Z y el campo, como se ha dicho (aunque desconocido) es paralelo al plano Xr formando entonces noventa grados con el vector superficie de las tapas. Para aplicar el teorema de Gauss empezamos, como siempre, calculando el flujo por esta superficie aplicando su definición:

$$\phi_{defin} = \int_{S.lateral} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int E \cdot s \cdot cos0 = E \int ds = E \cdot S = E2\pi r \cdot h$$

La superficie lateral de un cilindro es $2\pi rh$.

El segundo paso es calcular el flujo aplicando el teorema de Gauss:

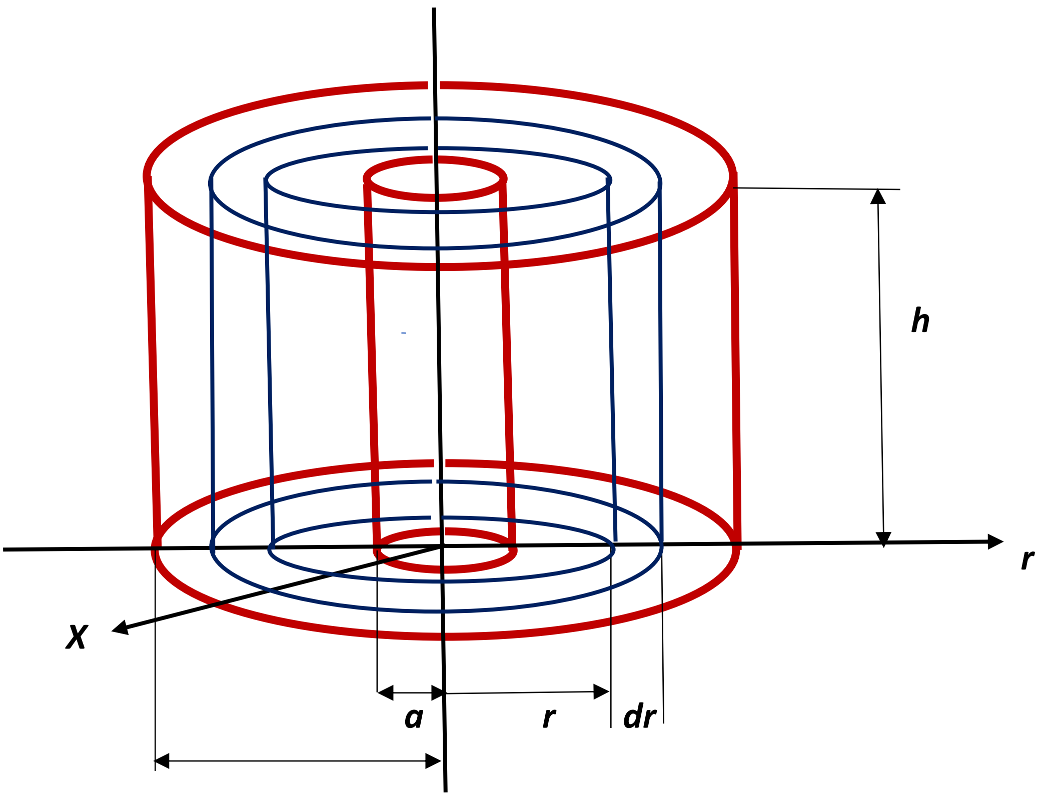
$$\phi_{Gauss} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon}$$

Tenemos que calcular la carga que tiene encerrada este cilindro verde. Esta carga está en la corona cilíndrica cuyo cilindro interior es la frontera interior de la corteza, de radio ***a*** y cuyo cilindro exterior es la superficie gaussiana verde, de radio ***r***. Si la densidad fuera constante no tendríamos nada más que aplicar la fórmula

$$Q = \sigma \cdot V$$

Donde σ es la densidad volúmica y V el volumen del que queremos calcular la carga.

Pero en nuestro caso, la densidad es variable y depende de la distancia al eje del cilindro. Por lo tanto, tenemos que coger un volumen infinitesimal donde la densidad sea constante, un volumen formado entonces por los puntos que disten una distancia "casi" constante al eje. Creemos que se puede ver fácilmente que ese volumen es el encerrado entre los dos cilindros azules, distantes una distancia r del eje ya que su grosor es infinitesimal, ***dr,*** y podemos considerar constante su densidad. En la figura no se ha dibujado la superficie gaussiana para que el dibujo quede más claro. A la hora de integrar tendremos claro que los límites entre los que está la carga interior son ***r=a*** y ***r=r,*** como ya se ha dicho.



Dicho volumen se calcula de la siguiente manera:

Cuando tenemos una función, en nuestro caso el volumen de un cilindro, podemos calcular el volumen infinitesimal que resulta cuando la variable sufre un incremento también infinitesimal de la siguiente manera:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h \rightarrow \frac{dV}{dr} = 2\pi rh \rightarrow \boldsymbol{dV = 2\pi rhdr}$$

La última expresión nos está diciendo que si en un cilindro de radio ***r*** (y altura constante ***h***) el radio crece una distancia ***dr*** el volumen crece $\boldsymbol{2\pi rhdr}$ que es justamente el volumen encerrado entre los dos cilindros azules. En todo ese volumen infinitesimal la densidad es constante (la distancia de todos sus puntos al eje es fundamentalmente ***r)***. Por lo tanto, la carga infinitesimal en ese volumen será:

$$dQ = \sigma \cdot dV = \left| \begin{matrix} \sigma = D \cdot r^2 \\ dV = 2\pi rhdr \end{matrix} \right| = Dr^2 2\pi rhdr$$

Una vez planteado el diferencial de carga, la integral nos suma todos esos diferenciales, por lo que la carga total encerrada en la superficie gaussiana será:

$$Q = \int_a^r 2\pi Dhr^3 dr = 2\pi Dh \cdot \frac{r^4}{4}\Big]_a^r = \frac{1}{2}\pi Dh(r^4 - a^4)$$

$$\phi_{Gauss} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon} = \frac{\pi Dh(r^4 - a^4)}{2\varepsilon}$$

El módulo del campo lo calculamos igualando el flujo calculado por la definición con el flujo calculado por el teorema:

$$\phi_{defin} = E \cdot 2\pi rh$$

$$\phi_{Gauss} = \frac{\pi Dh(r^4 - a^4)}{2\varepsilon}$$

E igualando ambos:

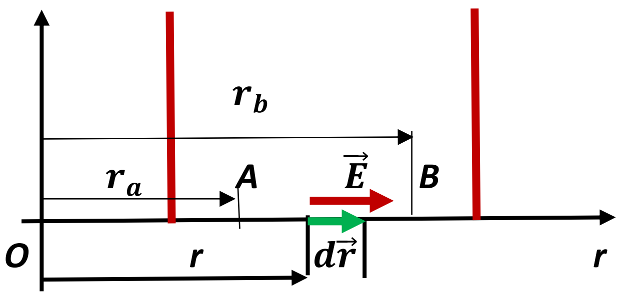
$$E \cdot 2\pi rh = \frac{\pi Dh(r^4 - a^4)}{2\varepsilon} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\pi D h(r^4 - a^4)}{2\varepsilon \cdot 2\pi r h} = \frac{\boldsymbol{D(r^4 - a^4)}}{\boldsymbol{4\varepsilon r}}$$

Calculado el campo en los puntos del interior de la corona podemos calcular la diferencia de potencial entre dos de ellos. Para ello aplicamos la ley fundamental que define la diferencia de potencial entre dos puntos:

$$\boldsymbol{V(r_b) - V(r_a) = -\int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

Vamos a calcular la diferencia de potencial entre los puntos ***A*** y ***B,*** determinados por las posiciones $r_a\ y\ r_b$ respectivamente.



Como se observa en la figura, el producto escalar de los vectores campo eléctrico y diferencial de desplazamiento forman cero grados, por lo que su producto escalar coincide con el producto de sus módulos. Aplicando la ley:

$$\boldsymbol{V(B) - V(A)} = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{D(r^4 - a^4)}{4\varepsilon r} dr =$$

$$\boldsymbol{-\frac{D}{4\varepsilon}\int_{r_a}^{r_b}\left(r^3 - \frac{a^4}{r}\right)dr}$$

Integral que no os parece interesante acabar aquí, es muy sencilla. Por último, un comentario: dicha diferencia de potencial sale negativa porque, como debemos de saber, el potencial decrece en la dirección del campo.