victor loza
ACADEMIA ONLINE

TIPO 3. POR PARTES

Una identidad de cálculo nos puede ayudar a resolver una integral. Es la siguiente:

$$\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$$

Lo que nos interesa es que nos transforma una integral en otra y, si ésta es más sencilla, es evidentemente un método de integración. Ahora nos quedaremos únicamente con el cálculo mecánico. Con varios ejemplos quedará claro.

Utilizamos este método si aparecen mezcladas funciones Arcsenx, Arccosx…Logaritmos, Polinomios, Exponenciales y senos, coseno...

Volviendo a la fórmula, la integral que nos dan es $\int \mathbf{udv}$ por lo que a una parte de ella la tenemos que llamar u y al resto, junto con el dx, llamarle *dv*.

Para ello suele funcionar una reglilla basada en la palabra ALPES donde cada una de las letras son las iniciales de las funciones Arcsenx, Log, Polinomios, Exponenciales, Senos. Dicha reglilla es

llamarle u a la función que aparece primero en la secuencia ALPES y al resto, junto con el dx, dv. Se trata de que la integral a la que lleguemos sea una integral más sencilla, si eso no es así mandamos la reglilla al carajo y hacemos lo contrario (aunque suele funcionar). Utilizando la regla estamos llamando u a la función más difícil de integrar. Sabido esto, lo mejor es ver ejemplos.

Ejemplo 1

$$\int \boldsymbol{xe^x dx}$$

Tenemos en el integrando un polinomio, ***P,*** y una función exponencial ***E.*** Como en la palabra ***ALPES*** aparece ***P*** antes que ***E,*** llamamos ***u*** al polinomio y ***dv*** a la exponencial

$$\rightarrow \left| \begin{matrix} x = u \rightarrow dx = du \\ e^x dx = dv \rightarrow \int e^x dx = \int dv \rightarrow e^x = v \end{matrix} \right| \rightarrow$$

Cuando hemos hecho ***x=u,*** hemos relacionado los diferenciales como en los casos de cambio de variable: derivada de la izquierda respecto de ***"x"*** por ***dx* igual** a la derivada de la derecha respecto de **"u"** por ***du***

$$\boldsymbol{x = u \rightarrow 1 \cdot dx = 1 \cdot du}$$

Para calcular ***v*** hemos integrado ***dv*** pues, al igual que

$$\int dx = x$$

La integral de ***dv*** es ***v***

El cálculo de *du* y de *v* se hará siempre de la manera indicada

Sustituyendo en la fórmula

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Ejemplo 2

$$\int \boldsymbol{x^2 e^x dx}$$

Al igual que en el caso anterior, llamaremos ***u*** al polinomio y ***dv*** a la exponencial.

$$\int x^2 e^x dx = \left| \begin{matrix} x^2 = u \rightarrow 2xdx = du \\ e^x dx = dv \rightarrow e^x = v \end{matrix} \right| = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2xdx$$

Hemos llegado a una integral que no es inmediata. Sin embargo, es del mismo tipo, **por partes**, puesto que aparece un polinomio y una exponencial. Pero el polinomio es de un grado menor, así que podemos decir que el método funciona, lo que ocurre es que hay que aplicarlo otra vez. Además, si nos fijamos, es la integral que hemos resuelto en el ejercicio ***1,*** por lo que no la volvemos a hacer**.** El método se puede aplicar las veces que sean necesarias, en nuestros problemas dos serán suficientes.

Otro tipo de integrales a las que aplicaremos este método serán aquellas donde SOLO APARECE UNA FUNCIÓN TRASCENDENTE, DEL TIPO ARCO O LOGARITMO. No nos quedará más opción que llamar a esa función *u* y al resto *dx=dv*

Ejemplo 3

$$\int \boldsymbol{arcsenxdx} = \left| \begin{matrix} arcsenx = u \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = du \\ dx = dv \rightarrow \int dx = \int dv \rightarrow v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= xarcsenx - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Como vemos, la integral inicial se ha transformado en otra, se supone que más fácil pero que no es inmediata. Podría ser de cualquiera de los seis tipos que vamos a ver, pero no. En este caso es, si miramos un poco, del segundo tipo de cambio de variable. Aparece la función $\boldsymbol{1-x^2}$, y su derivada multiplicando a ***dx.*** Por lo tanto, haremos

$$\boldsymbol{1-x^2=t}$$

$$\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left|1-x^2=t\rightarrow -2xdx=1\cdot dt\rightarrow xdx=\frac{dt}{-2}\right|$$

$$=\int\frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=-\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=$$

$$=-t^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{t}=-\sqrt{1-x^2}$$

No olvidar sustituir este resultado en la primera integral que estamos haciendo:

$$\int \boldsymbol{arcsenxdx}=xarcsenx-\left(-\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$=\boldsymbol{xarcsenx+\sqrt{1-x^2}+C}$$

Un caso dentro de estas integrales muy típico es aquel en que después de aplicar el método unas veces (normalmente dos) se nos vuelve a aparecer la integral primera que queremos hacer. Entonces se despeja. Suelen estar formadas por exponenciales y trigonométricas pues sus derivadas se repiten. Se ve con un ejemplo:

Ejemplo 4

$$\int \boldsymbol{e^x senxdx}$$

En la secuencia ***ALPES*** la exponencial está antes que el seno, por lo tanto, haremos la exponencial igual a ***u*** y el resto ***dv***

$$\int e^x senxdx=\begin{cases}\boldsymbol{e^x=u\rightarrow e^xdx=1\cdot du}\\ senxdx=dv\rightarrow\int senxdx=\int dv\rightarrow \boldsymbol{-cosx=v}\end{cases}$$

$$= e^x(-cosx) - \int -cosxe^x dx = -e^x cosx + \int e^x cosxdx$$

Después de la primera aplicación del método nos queda:

$$\int \boldsymbol{e^x senxdx = -e^x cosx + \int e^x cosxdx} \quad (\mathbf{1})$$

Hagamos ahora la segunda integral por el mismo método claro, puesto que es el producto de una exponencial por una trigonométrica

$$\int e^x cosxdx = \left| \begin{matrix} e^x = u \rightarrow e^x dx = du \\ cosxdx = dv \rightarrow senx = v \end{matrix} \right| = e^x senx - \int senxe^x dx$$

Sustituyendo esta integral en la ecuación (1) nos queda:

$$\int \boldsymbol{e^x senxdx} = -e^x cosx + \int e^x cosxdx =$$

$$\boldsymbol{-e^x cosx + e^x senx - \int e^x senxdx}$$

Ecuación que nos permite despejar la integral. Pasamos la integral de la derecha a la izquierda y despejando:

$$2\int e^x senxdx = e^x(senx - cosx) \rightarrow$$

$$\int \boldsymbol{e^x senxdx = \frac{1}{2} e^x(senx - cosx) + C}$$

Como vemos en los ejemplos, la segunda integral a la que llegamos puede ser inmediata, por cambio de variable o también por partes.