IRRACIONALES. RAIZ CON COCIENTE DE FUNCIONES LINEALES

Este es el segundo caso de integrales irracionales por su sencillez. **En ellas aparece una raíz, de orden cualquiera, y en su interior un cociente de funciones lineales**. Para quitarnos la raíz, que es lo que pretendemos, llamamos al cociente de funciones lineales de su interior ***t* elevado al índice de la raíz.**

Ejemplo

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}\,dx$$

Como se ha dicho, el cociente de funciones lineales lo llamamos $\boldsymbol{t^3}$ **donde 3 es el índice de la raíz** y de esa manera desaparece la raíz.

$$\left| \begin{array}{c} \frac{x+1}{x-2} = t^3 \ se\ despeja\ x\ para\ calcular\ dx \rightarrow x+1 = xt^3 - 2t^3 \rightarrow \\ x - xt^3 = -1 - 2t^3 \rightarrow x(1-t^3) = -1 - 2t^3 \rightarrow x = \frac{-1-2t^3}{1-t^3} = \frac{1+2t^3}{t^3-1} \\ 1dx = \frac{6t^2(t^3-1) - (1+2t^3)3t^2}{(t^3-1)^2}dt = \frac{-9t^2}{(t^3-1)^2}dt \end{array} \right|$$

Sustituyendo en la integral dada:

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}\,dx = \int t \cdot \frac{-9t^2}{(t^3-1)^2}dt$$

La última racional a la que llegamos siempre es racional como en el ejemplo. En este caso hay que descomponer el polinomio

$$t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$$

La integral queda, sustituyendo:

$$-9\int\frac{t^3}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}dt$$
$$=\left|\frac{t^3}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{Ct+D}{t^2+t+1}+\frac{Et+F}{(t^2+t+1)^2}\right|$$

Para calcular las constantes se opera como de costumbre, se agrupa en un único quebrado la suma de la derecha y se igualan numeradores. Dando valores a ***x*** en la igualdad de polinomios obtenemos el número de ecuaciones necesarias (seis en nuestro caso). Normalmente están preparadas para que no sea tan larga, pero hemos preferido que aquí salgan todas las posibilidades. Recalcamos que la última integral tiene raíces imaginarias múltiples, utilizaremos por lo tanto la fórmula de Hermite-Ostrogadsky. También insistimos que, cuando se separan las raíces imaginarias, en su numerador hay que poner siempre un polinomio de primer grado.