victor loza
ACADEMIA ONLINE

DISTANCIAS Y ÁNGULOS

Así como en los tres temas anteriores hemos hablado de direcciones, paralelismo, perpendicularidad y de las ecuaciones de las rectas y sus intersecciones, en este hablaremos de las distancias entre puntos y rectas y del ángulo que forman dos rectas.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos A y B no es más que el módulo del vector formado por ellos, $\overrightarrow{AB}\ o\ \overrightarrow{BA}$, pues ambos tienen el mismo. La fórmula del módulo de un vector hay que recordarla:

$$\vec{v} = (a, b) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo

Calcular la distancia entre los puntos A (1,-3) y B (-4,9)

Calculamos primero el vector $\overrightarrow{AB}$

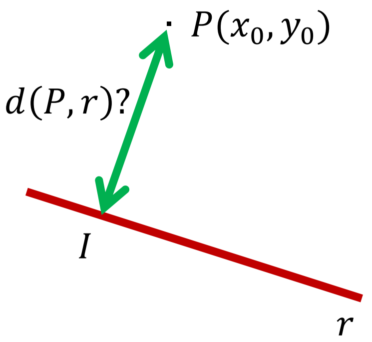
$$\overrightarrow{AB} = (B - A) = \big(-4 - 1, 9 - (-3)\big) = (-5,12) \rightarrow$$

$$d(AB) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{169} = 13\ u.$$

La "*u*" última significa *unidades de longitud.* Si estamos hablando de un área pondremos u^2 y, si se trata de un volumen, pondremos u^3

DISTANCIA ENTRE PUNTO Y RECTA

Sea la recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ y el punto $P(x_0, y_0)$ y queremos hallar la distancia entre ellos. Hacemos un dibujo (no hace falta que sea rigurosa la representación en unos ejes cartesianos)



La primera forma por la que vamos a resolver el problema es sin utilizar una fórmula que escribiremos al final. Es muy sencillo y creemos que es más "creativo" y nos ayuda a practicar los conceptos. Como vemos claramente en la figura, dibujar la situación es algo que recomendamos siempre en este tipo de problemas, la distancia pedida está sobre la perpendicular a la recta r.

Hallaremos pues esta recta perpendicular a la recta "r" lo primero y ya con su ecuación deducida podremos hallar el punto de intersección entre las dos. Conocido el punto I la distancia pedida no es más que la distancia entre dos puntos, P e I.

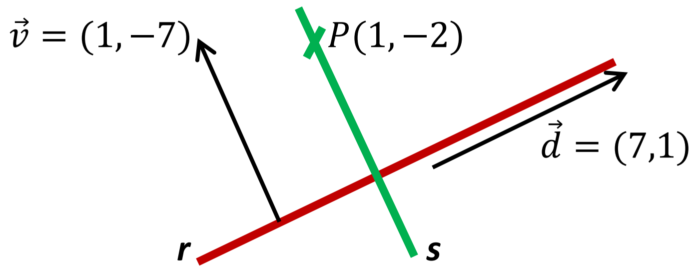
Lo visualizamos mejor, creemos, con un ejemplo.

Ejemplo

Calcular la distancia entre la recta $x-7y+2=0$ y el punto $P(1,-2)$

Dibujamos la situación

Recta s (en verde) perpendicular a r (en rojo) por el punto P



Como sabemos por teoría, de la ecuación en forma general de la recta dada ***r*** deducimos los vectores $\vec{v}$, perpendicular a la recta ***r***, y $\vec{d}$ director de la recta y con su misma dirección. La recta que queremos calcular tiene claramente la dirección del vector $\vec{v}$ y como ya sabemos un punto por el que pasa, P, podemos ya calcular su ecuación:

$$\begin{cases} P(1,-2) \\ \overrightarrow{d_s}=(1.-7) \end{cases} \rightarrow s \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-(-2)}{-7}$$

Que puesta en forma general es

$$\boldsymbol{s \equiv -7x-y+5=0}$$

Ahora, el segundo paso, es calcular el punto I intersección de ambas por lo que, como hemos dicho, resolvemos el sistema de las ecuaciones formadas por ellas:

$$\begin{cases} r \equiv x-7y+2=0 \\ s \equiv -7x-y+5=0 \end{cases}$$

Cuya solución es el punto I

$$I\left(\frac{33}{50},\frac{19}{50}\right)$$

Por último, la distancia entre la recta r y el punto P dado es la distancia entre los dos puntos, *P* e *I :*

$$P(1,-2) \quad I\left(\frac{33}{50},\frac{19}{50}\right)$$

Esa distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PI}$:

$$\overrightarrow{PI} = \left(1-\frac{33}{50},-2-\frac{19}{50}\right) = \left(\frac{17}{50},-\frac{119}{50}\right)$$

Cuyo módulo y solución del problema es:

$$\boldsymbol{d(P,r)} = \left|\overrightarrow{PI}\right| = \sqrt{\left(\frac{17}{50}\right)^2+\left(\frac{-119}{50}\right)^2} = \sqrt{\frac{14450}{50^2}} = \sqrt{\frac{289}{50}} = \frac{17}{5\sqrt{2}}u$$

Como hemos dicho al principio, hay una fórmula que nos permite hacer esto más rápido y es la que utilizaremos normalmente.

Fórmula de distancia de punto a recta es la siguiente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r \equiv Ax+By+C=0} \\ \boldsymbol{P(x_0,y_0)} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{d(P,R)} = \left|\frac{\boldsymbol{Ax_0+By_0+C}}{\sqrt{\boldsymbol{A^2+B^2}}}\right|$$

En nuestro ejemplo:

$$d(P,r) = \left|\frac{1\cdot 1+(-7)(-2)+2}{\sqrt{(1)^2+(-7)^2}}\right| = \frac{17}{\sqrt{50}}$$

DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS

Lo comentamos por tener un orden, pero creemos que no es necesario decir que la distancia entre dos rectas paralelas **se calcula fácilmente cogiendo un punto cualquiera de ellas y calculando su distancia a la otra por la fórmula de distancia punto-recta anterior.** Con esto creemos que es suficiente. En la sección de problemas aparecerán ejemplos.

ÁNGULO QUE FORMAN DOS RECTAS

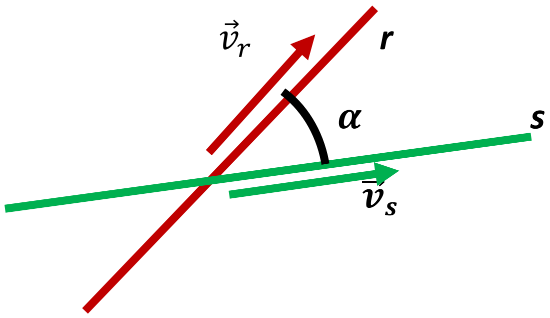
Lo mismo que el apartado anterior, de la teoría sobre vectores ya sabemos el ángulo que forman dos vectores. Por lo tanto, **ya sabemos el ángulo que forman dos rectas, pues no es más que el ángulo que forman sus vectores directores. También, el ángulo entre los vectores directores es el mismo que entre los vectores perpendiculares, por lo que podemos elegir indistintamente unos u otros.**

Ejemplo

Calcular el ángulo que forman las rectas r y s siguientes:

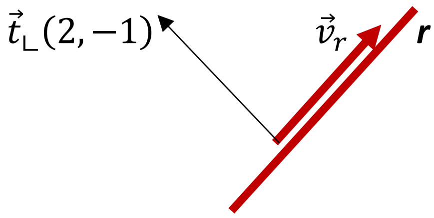
$$\begin{cases} \boldsymbol{r \equiv 2x - y + 2 = 0} \\ \boldsymbol{s \equiv x + y + 1 = 0} \end{cases}$$

Dibujamos la "situación"



Queremos calcular el ángulo α. Para ello necesitamos, claramente, conocer los vectores $\vec{v}_s$ y $\vec{v}_r$ que indican las direcciones de ambas rectas.

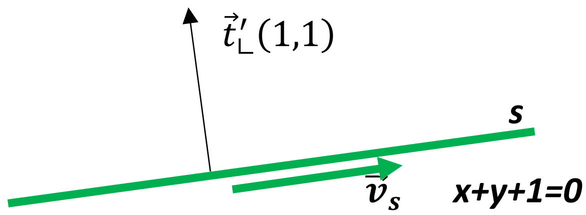
Vector $\vec{v}_r$ de la recta *r 2x-y+2=0*



El vector $\vec{v}_r$ es perpendicular al vector (2,-1). Por lo tanto:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$$

Vector $\vec{v}_s$ *de la recta s x+y+1=0*



El vector $\vec{v}_s$ es perpendicular al vector (1,1). Por lo tanto:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{s}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

Ya podemos calcular el ángulo que forman ambos vectores.

Recordamos la fórmula

$$\vec{v} = (v_1, v_2), \vec{t} = (t_1, t_2) \rightarrow$$

$$\boldsymbol{cos\alpha} = \frac{\boldsymbol{v_1 t_1 + v_2 t_2}}{|\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{t}}|}$$

En nuestro caso:

$$cos\alpha = \left| \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow$$

$$\alpha = arcsen \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 18.43\,°$$

Fijarse que el coseno lo hemos igualado al valor absoluto del cociente que proviene de la fórmula. Esto es así porque dos rectas forman dos ángulos suplementarios, uno mayor que 90 y otro menor. De esta manera calculamos el ángulo menor, el que tiene el coseno positivo.

Si hubiéramos cogido los vectores perpendiculares a las rectas, los vectores $\vec{\boldsymbol{t}}_{\llcorner}(\mathbf{2}, -\mathbf{1})$ $\boldsymbol{y}$ $\vec{\boldsymbol{t}}'_{\llcorner}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ nos hubiera salido lo mismo por lo que, si lo queremos hacer más rápido, no hace falta calcular los vectores directores.