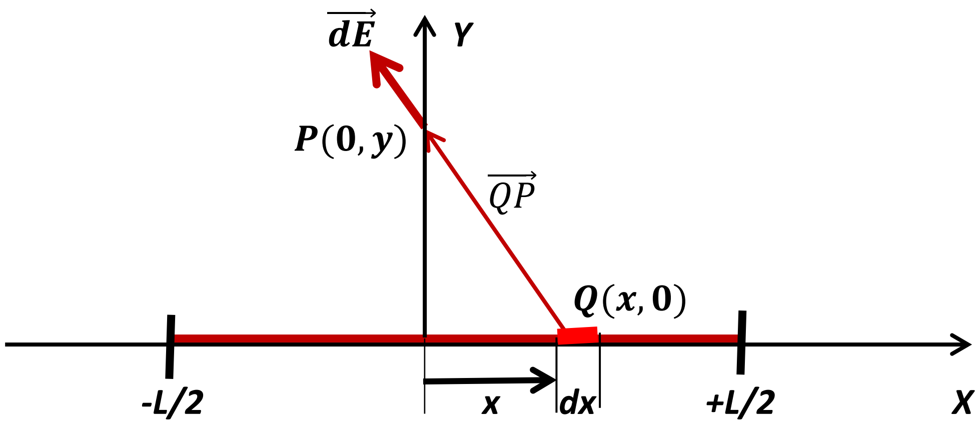
CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA. VARILLAS Y AROS

Cuando tenemos una distribución continua de cargas, una varilla cargada, por ejemplo, es evidente que no podemos aplicar la ley de Coulomb ya que no tenemos cargas puntuales y no podemos hablar de una distancia única al punto donde queremos calcular el campo. La idea fundamental es la siguiente (se utiliza en muchos casos en física): **elegimos un trozo muy pequeño (infinitesimal) genérico definido por su posición** (normalmente para definir esa posición será suficiente con una variable, lineal o circular, en nuestros problemas) y **calculamos el campo eléctrico creado por esa carga infinitesimal (ya es puntual) y después sumaremos las contribuciones de todas esas cargas infinitesimales por medio de una integral.** Esta es la idea que con varios ejemplos creemos quedará clara. Veamos:

CAMPO CREADO POR UNA VARILLA: Campo en el punto P

La varilla de la figura tiene longitud L y una densidad de carga por unidad de longitud γ C/m. Calcular el campo eléctrico en el punto P creado por la varilla.



El punto ***P*** tiene de coordenadas ***(0, y)*** **donde *y* es CONSTANTE.** Estamos calculando el campo en un punto arbitrario del eje ***Y,*** pero **"fijo".**

Aquí tenemos una distribución continua de cargas (varilla roja) sobre el eje X que va desde ***x=-L/2*** hasta ***x=L/2***

Empezamos definiendo una carga puntual en una posición genérica definida por, en este caso, la variable ***"x"*** (en el dibujo el origen de coordenadas está en el medio de la varilla roja) y, como tiene que ser puntual o muy pequeña, **su longitud es *dx***. El punto donde está lo llamaremos ***Q***. Una vez definida la carga puntual procedemos como en los casos anteriores:

Primero, vector unitario en la dirección del campo:

$$\rightarrow \text{Vector } \overrightarrow{\text{QP}} (\text{misma dirección y sentido que el campo}):$$

$$\overrightarrow{QP} = (0 - x, y - 0) = (-x, y);\ \left|\overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{(-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{QP}\right|}\overrightarrow{QP} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-x, y)}$$

Segundo, módulo del campo creado por la carga infinitesimal de longitud dx

$$dq = \gamma dx$$

La carga en la longitud ***dx*** es la que hay por unidad de longitud (la densidad) por la longitud que tenemos.

Aplicando la ley de Coulomb a esta carga puntual:

$$\left|\overrightarrow{dE}\right| = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\gamma dx}{x^2 + y^2}$$

Sabiendo el módulo del campo y su vector unitario nos queda:

$$\overrightarrow{dE} = \left|\overrightarrow{dE}\right|\vec{u} = k\frac{\gamma dx}{x^2 + y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{dE} = k\frac{\gamma dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(-x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})}$$

Sólo queda sumar estas contribuciones infinitesimales para calcular el campo total. No preocuparse: **LA INTEGRAL NOS SUMA TODAS LAS CONTRIBUCIONES INFINITESIMALES.**

Tendremos entonces:

$$\vec{E} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k \frac{\gamma dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(-x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$$
$$= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k \frac{\gamma dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(-x\vec{\imath})$$
$$+ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k \frac{\gamma dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} y\vec{\jmath}$$
$$= -k\gamma\vec{\imath}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{x dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + k\gamma y\vec{\jmath}\int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Donde se han sacado fuera de la integral las constantes (insistimos en que ***"y"*** es la altura del punto P y por lo tanto una constante, **la variable es *x*).**

El problema físico ya está acabado. Queda efectuar las integrales, pero eso no es la intención de este capítulo (además hay muchos programas que las hacen muy bien). La primera es sencilla porque tenemos una función, $x^2 + y^2$, y su derivada multiplicando a ***dx.*** La segunda es más complicada y no nos parece que sea propio de este capítulo.

CAMPO CREADO POR UN ARO O PARTE DE ÉL EN SU CENTRO

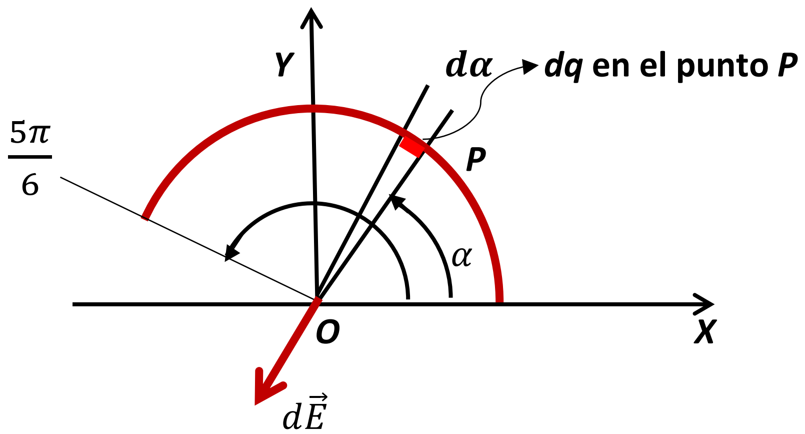
El arco es de $5\,{}^{\pi}/_{6}\,Rd$, su radio es R y su densidad de carga es

$$\gamma\ {}^{C}/_{m}$$

Calcular el campo eléctrico en su centro

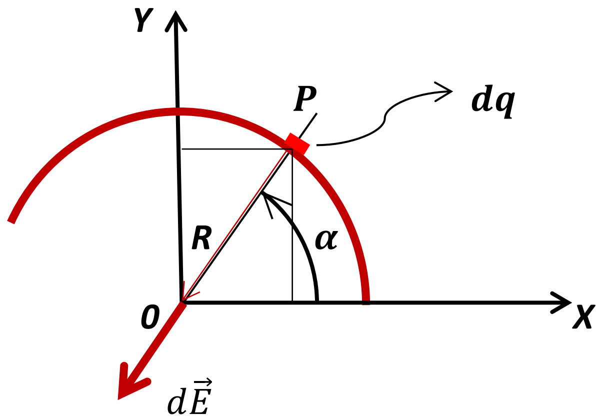
Vamos a utilizar, en esencia, el mismo método que en las varillas: vamos a coger un elemento infinitesimal de carga (podremos entonces tratarla como puntual y aplicar la ley de Coulomb) y después calcularemos su contribución al campo. Para finalizar sólo tendremos que sumar las contribuciones infinitesimales por medio de una integral (vieja idea que no nos importa repetir).

La diferencia con la varilla es que la posición genérica de la carga infinitesimal está definida por el ángulo α, LA VARIABLE, y la carga infinitesimal está encerrada en un ángulo, $d\alpha$, también infinitesimal.



El siguiente proceso es similar al de la varilla y anteriores:

Primero dibujamos el campo eléctrico creado por la carguita en el punto ***O***, $d\vec{E}$ en la figura y el vector unitario en su dirección, la del vector $\overrightarrow{PO}$. Para ello calculamos el punto ***P*** **EN FUNCIÓN DE LA VARIABLE α.**



Coordenadas del punto P

$$\boldsymbol{x = Rcos\alpha;\ \ y = Rsen\alpha.} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(Rcos\alpha, Rsen\alpha)}$$

$$\overrightarrow{PO} = (0 - Rcos\alpha, 0 - rsen\alpha) = (-Rcos\alpha, -Rsen\alpha)$$

$$\left|\overrightarrow{PO}\right| = R$$

$$\boldsymbol{\vec{u}} = \frac{\mathbf{1}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PO}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{PO}} = \frac{1}{R}(-Rcos\alpha, -Rsen\alpha)$$

$$\boldsymbol{\vec{u}} = (-\boldsymbol{cos\alpha}, -\boldsymbol{sen\alpha})$$

Vector unitario en la dirección del campo

Segundo: calculamos el módulo del vector $d\vec{E}$

$$\left|\boldsymbol{d\vec{E}}\right| = \boldsymbol{k\frac{\gamma Rd\alpha}{R^2}}$$

Donde $\boldsymbol{Rd\alpha}$ es la longitud infinitesimal del “arquito” abarcado **por el ángulo** $\boldsymbol{d\alpha}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ **la densidad lineal de carga por lo que** $\boldsymbol{dq = \mu Rd\alpha}$. Sólo nos queda expresar el vector $\overrightarrow{dE}$ multiplicando su módulo por el vector unitario en su dirección y sentido:

$$\boldsymbol{d\vec{E} = K\frac{\gamma Rd\alpha}{R^2}(-cos\alpha\vec{\imath} - sen\alpha\vec{\jmath})}$$

De donde, integrando:

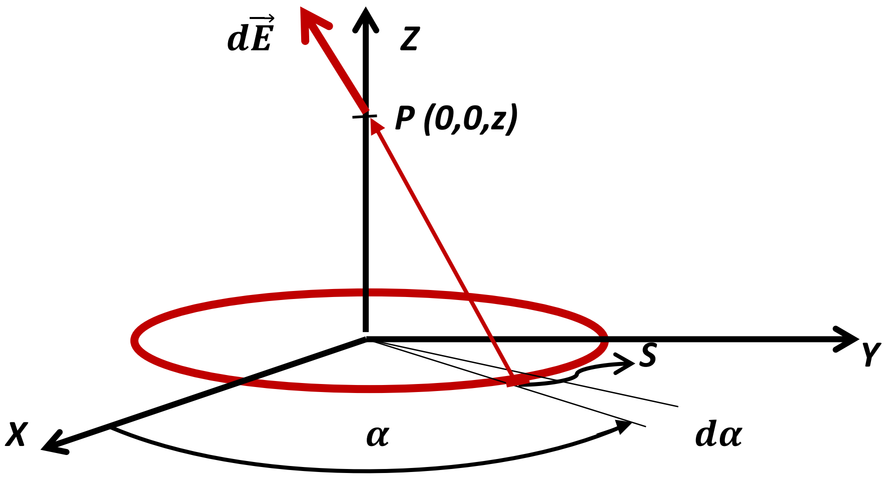
$$\vec{E} = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} K\frac{\gamma R d\alpha}{R^2}(-cos\alpha\vec{\imath} - sen\alpha\vec{\jmath}) =$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{6}} -K\frac{\gamma d\alpha}{R} cos\alpha\vec{\imath} + \int_0^{\frac{5\pi}{6}} -K\frac{\gamma d\alpha}{R} sen\alpha\vec{\jmath} =$$

$$-K\frac{\gamma}{R}\vec{\imath}[sen\alpha]_0^{\frac{5\pi}{6}} - K\frac{\gamma}{R}\vec{\jmath}[-cos\alpha]_0^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$-K\frac{\gamma}{R}\left(sen\frac{5\pi}{6}\right)\vec{\imath} + K\frac{\gamma}{R}\left(cos\frac{5\pi}{6} - cos0\right)\vec{\jmath}$$

CAMPO CREADO POR UN ANILLO EN PUNTOS DE SU EJE PERPENDICULAR



Sea el anillo de radio R situado en el plano XY. Queremos hallar el campo eléctrico generado por dicho anillo en el punto P a una altura ***z*** sobre el origen en el eje Z como se ve en la figura. Como en el caso anterior, empezamos posicionando una carga infinitesimal dq por medio del ángulo α que empieza en el eje X y acaba en el punto S del anillo donde tenemos la carga dq entre dos líneas que forman $d\alpha$. Dibujamos el vector d$\vec{E}$ que tiene su origen en el punto P como indica la figura y continuamos como en los ejemplos anteriores. El punto Q, como se desprende de la figura, tiene de coordenadas:

$$S(Rcos\alpha, Rsen\alpha, 0)$$

Primero calculamos el vector unitario en la dirección de $d\vec{E}$:

un vector que va en su misma dirección y sentido es el vector $\overrightarrow{SP}$

$$\overrightarrow{SP} = (0,0,z) - (Rcos\alpha, Rsen\alpha, 0) = (-Rcos\alpha, -Rsen\alpha, z)$$

De módulo

$$\left|\overrightarrow{SP}\right| = \sqrt{(-Rcos\alpha)^2 + (-Rsen\alpha)^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Por lo tanto, el vector unitario en la dirección del campo es:

$$\vec{u} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{SP}\right|}\overrightarrow{SP} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{R^2 + z^2}}}(-\boldsymbol{Rcos\alpha}, -\boldsymbol{Rsen\alpha}, \boldsymbol{z}) = \vec{\boldsymbol{u}}$$

Segundo, calculamos el módulo del vector $d\vec{E}$

$$\left|d\vec{E}\right| = K\frac{\gamma R d\alpha}{\left(\sqrt{R^2 + z^2}\right)^2}$$

Donde $dq = \gamma dl = \gamma R d\alpha$

Estando ya en condiciones de escribir el vector $d\vec{E}$:

$$\boldsymbol{d\vec{E}} = \boldsymbol{K}\frac{\boldsymbol{\gamma R d\alpha}}{\boldsymbol{R^2 + z^2}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{R^2 + z^2}}}(-\boldsymbol{Rcos\alpha}, -\boldsymbol{Rsen\alpha}, \boldsymbol{z})$$

Integrando esta expresión, para sumar todas las contribuciones infinitesimales, calculamos el campo total:

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} K \frac{\gamma R d\alpha}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-Rcos\alpha\vec{\imath} - Rsen\alpha\vec{\jmath} + z\vec{k}\right)$$
$$= -k \frac{\gamma R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{\imath} \int_0^{2\pi} cos\alpha d\alpha$$
$$- k \frac{\gamma R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{\jmath} \int_0^{2\pi} sen\alpha d\alpha + k \frac{\gamma R z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k} \int_0^{2\pi} d\alpha$$

Donde se han sacado fuera de la integral las constantes (no olvidar que la "z" del punto es constante). Además, las dos primeras integrales valen cero (la integral del seno y del coseno en la vuelta entera vale cero), quedando el campo sólo en dirección vertical (si en un principio nos hubiéramos dado cuenta de que la componente paralela al plano XY del vector $d\vec{E}$ queda contrarrestada por la que crea la carguita infinitesimal situada en frente de la nuestra, podíamos habernos ahorrado parte del cálculo, pero intentamos no presuponer ninguna característica del ojo del lector). Finalizando, el campo nos queda:

$$\vec{E} = K \frac{\gamma R z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k} \int_0^{2\pi} d\alpha = K \frac{\gamma 2\pi R z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k} = |\gamma 2\pi r = Q_{anillo}|$$
$$= K \frac{Q_a z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{E} = K \frac{Q_a z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}}$$