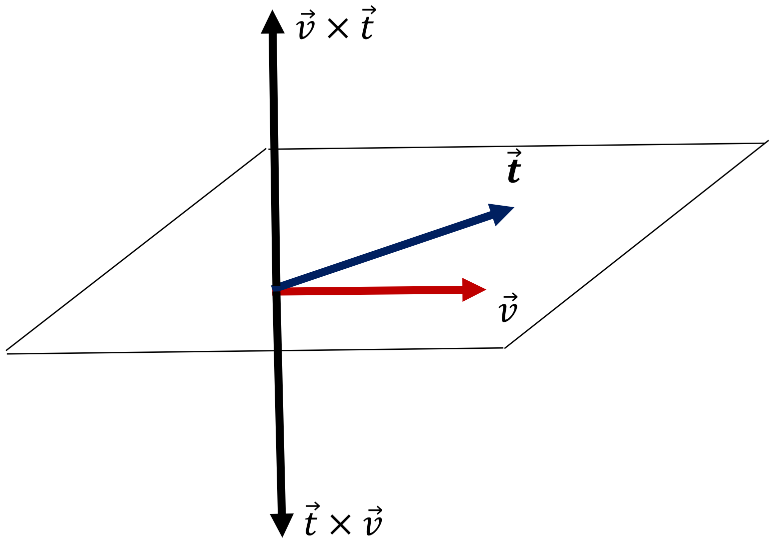
PRODUCTO VECTORIAL. Paralelismo. Área del triángulo y paralelogramo.

El producto vectorial de dos vectores es otro vector que se define de la siguiente manera:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \vec{t} = (t_x, t_y, t_z) \rightarrow$$

$$\vec{v} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ t_x & t_y & t_z \end{vmatrix}$$

Geométricamente, es un vector perpendicular a los dos de los que proviene y sentido el que marque el giro de un tornillo "roscado a derechas" (los más utilizados) al llevar el primer vector sobre el segundo, en nuestro caso $\vec{v}$ sobre $\vec{t}$



No es conmutativo (por la definición, al cambiar el orden del producto cambia el orden de dos filas del determinante y, como sabemos, el determinante cambia de signo).

$$\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{t}} = -(\vec{\boldsymbol{t}} \times \vec{\boldsymbol{v}})$$

Se demuestra que su módulo es

$$|\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{t}}| = |\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{t}}| \boldsymbol{sen\alpha}$$

Donde alfa es el ángulo que forman.

El producto vectorial nos lleva a la **condición de paralelismo**, ya que si dos vectores son paralelos el ángulo que forman es cero o ciento ochenta y, dado que el seno de ambos ángulos es cero, el **producto vectorial también será cero**. Pero también podemos aplicar otra condición para el paralelismo de dos vectores**: sus componentes han de ser proporcionales**.

Resumiendo, tenemos dos condiciones a elegir para el paralelismo de dos vectores: $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$

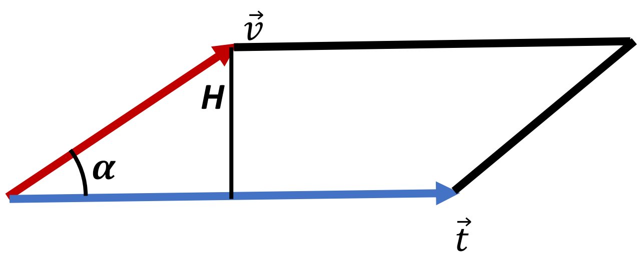
SON PARALELOS SI:

$$\frac{\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{t_x}} = \frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{t_y}} = \frac{\boldsymbol{v_z}}{\boldsymbol{t_z}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$$

Las aplicaciones de esta operación son muy importantes y variadas. Vamos a ver algunas de ellas referidas a la geometría, pero en física hay también otras muy importantes. Por ello, recomendamos tener esta operación muy "clara". Veamos:

ÁREA DEL PARALELOGRAMO FORMADO POR DOS VECTORES

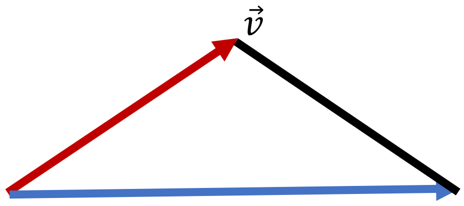


$$\boldsymbol{A} = |\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{t}}|$$

Ya que:

$$\left|\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{t}}\right| = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{sen\alpha} = |\boldsymbol{H} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{sen\alpha}| = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}$$

ÁREA DEL TRIÁNGULO



$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left|\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{t}}\right|$$

Puesto que es la mitad del área del paralelogramo.

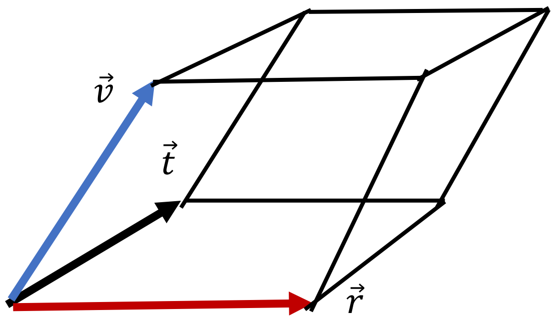
PRODUCTO MIXTO. Volumen del paralelepípedo

El producto mixto de tres vectores se define como

$$[\vec{v}, \vec{t}, \vec{r}] = \vec{v} \cdot (\vec{t} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ t_x & t_y & t_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

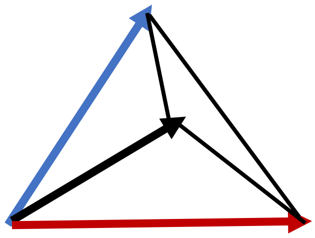
Siendo $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$ $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$

Es, por lo tanto, un número por tratarse del producto escalar de dos vectores, uno de los cuales, a su vez, es el producto vectorial de otros dos. Una de las cosas más interesantes en nuestro nivel es que su valor absoluto coincide con el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores, que se dibuja a continuación:



$$V = [\vec{v}, \vec{t}, \vec{r}]$$

El volumen del tetraedro formado por los tres vectores es la sexta parte del volumen del paralelepípedo



$$V = \frac{1}{6}[\vec{v}, \vec{t}, \vec{r}]$$

Hemos intentado ser simples pero estas operaciones son fundamentales para enfrentarse con un tema muy importante en 2º de bachiller: la geometría en tres dimensiones.