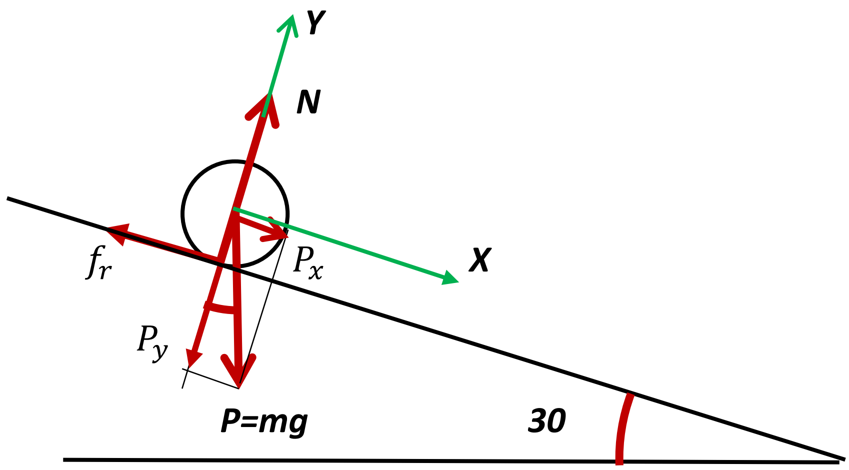
RODADURA “LIBRE”

Con rodadura “libre” nos referimos a la que tiene lugar sólo por efecto del peso, cuando un sólido rígido rueda por una superficie inclinada o se descuelga por una cuerda, tipo yo-yo.

Ejemplo 1

Un cilindro de masa $m = 10\ Kg$ rueda libremente sin deslizar por un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha = 30°$ con la horizontal. Hallar la aceleración de su centro de masas y su aceleración angular. Hallar también el coeficiente mínimo de rozamiento estático para que la rodadura sin deslizamiento sea posible. Si el coeficiente estático fuera la mitad del calculado en el apartado anterior y el coeficiente dinámico 0.27, calcular la aceleración del centro de masas y la aceleración angular en esas condiciones.



ESTUDIAMOS PRIMERO EL CENTRO DE MASAS COMO SI FUERA UNA PARTÍCULA. Como su trayectoria es una línea recta según el eje ***X*** dibujado, descomponemos las fuerzas sobre ese eje y el eje Y perpendicular como hemos hecho en los problemas del mismo tipo sobre la dinámica de traslación de la partícula.

Como apreciamos en la figura:

$$P_x = mgsen\alpha = mgsen30 = \frac{1}{2}mg$$

$$P_y = mgcos\alpha = mgcos30 = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

Y aplicando las leyes de Newton a los dos ejes:

$$\sum F_y = 0\ (a_y = 0) \rightarrow N = P_y \rightarrow \boldsymbol{N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg}$$

Este valor de la normal NO nos sirve para calcular la fuerza de rozamiento ya que NO hay deslizamiento y la fuerza de rozamiento es de tipo estático y, por lo tanto, una incógnita del problema.

$$\sum F_x = ma_{CM} \rightarrow P_x - f_r = ma_{CM} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}mg - f_r = ma_{CM}}\ \ \mathbf{(1)}$$

Ahora estudiamos el giro alrededor del centro de masas:

$$M_{CM} = I_{CM}\alpha \rightarrow f_r \cdot R = \frac{1}{2}mR^2\alpha \rightarrow$$

$$\boldsymbol{f_r = \frac{1}{2}mR\alpha}\ \ \mathbf{(2)}$$

Y teniendo en cuenta

$$\boldsymbol{a_{CM} = \alpha \cdot R}$$

Siendo ***R*** la distancia del centro de masas a eje instantáneo de rotación, el punto de contacto del cilindro con la superficie. Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2}mg - f_r = ma_{CM}$$

$$f_r = \frac{1}{2}mR\frac{a_{CM}}{R} = \frac{1}{2}ma_{CM}$$

Y sustituyendo el valor de la fuerza de rozamiento en la primera ecuación:

$$\frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}ma_{CM} = ma_{CM} \rightarrow \boldsymbol{a_{CM}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{g}$$

Y calculando con este valor la fuerza de rozamiento y la aceleración angular

$$f_r = \frac{1}{2}ma_{CM} \; = \frac{1}{6}mg$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{a_{CM}}{R} = \frac{\boldsymbol{g}}{\mathbf{3}\boldsymbol{R}}$$

Para calcular el coeficiente de rozamiento mínimo que es capaz de producir la rodadura sin deslizamiento procedemos de la siguiente forma:

$$f_r = \frac{1}{6}mg$$

Hemos de recordar que la fuerza de rozamiento de tipo estático tiene un valor máximo:

$$f_{r.máxima} = \mu_e N = \mu_e mgcos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_e mg$$

Por lo tanto, para la rodadura sin deslizamiento ha de cumplirse:

$$\boldsymbol{f_r} \leq \boldsymbol{f_{r.máxima}} \rightarrow \frac{1}{6}mg \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_e mg \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\mu_e} \geq \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$

Resolvemos, por último, la pregunta referente al cálculo de la aceleración del centro de masas y de la aceleración angular en el caso de que haya deslizamiento. En este caso, la fuerza de rozamiento es tipo dinámico y es igual al producto de la normal por el coeficiente dinámico

Utilizando el mismo diagrama de fuerzas:

$$\sum F_x = ma_{CM} \rightarrow mgsen30 - 0{,}27mgcos30 = ma_{CM} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{a_{CM}} = g\frac{1}{2} - 0{,}27g\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{2,66}\ {}^{\boldsymbol{m}}\!/\!_{\boldsymbol{s^2}}$$

Y para calcular la aceleración angular aplicamos la ley de la rotación:

$$M_{CM} = I \cdot \alpha \to 0{,}27mgcos30 \cdot R = \frac{1}{2}mR^2\alpha \to$$

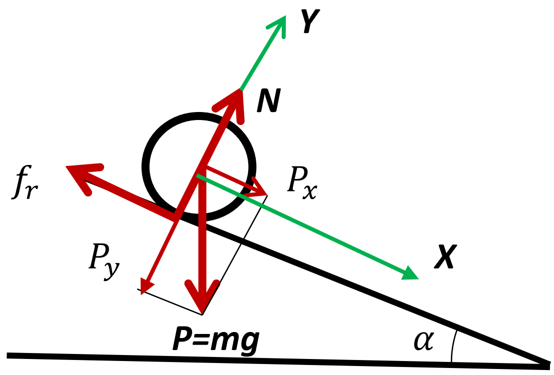
$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{2 \cdot 0{,}27gcos30}{R} \approx \frac{\mathbf{4,68}}{\boldsymbol{R}}\ {}^{\boldsymbol{Rd}}\!/\!_{\boldsymbol{s^2}}$$

Ejemplo 2

Un cilindro macizo, otro hueco y una esfera de la misma masa y radio ruedan libremente por un plano inclinado α grados respecto de la horizontal. Suponiendo que los tres caen de la misma altura, deducir cuál de ellos llega primero a la base del plano.

$$\boldsymbol{I_{c.mazico}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{mR^2};\ \boldsymbol{I_{c.hueco}} = \boldsymbol{mR^2};\ \boldsymbol{I_{esfera}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{mR^2}$$

Vamos a calcular la aceleración del centro de masas en función del momento de inercia y después, sustituyendo el de cada uno de los cuerpos, veremos en cuál de ellos es mayor.



Como sabemos, estudiamos primero el centro de masas aplicando las leyes de Newton. En este caso su movimiento es de traslación sobre el eje X y, como en el caso de una partícula, descomponemos las fuerzas sobre el eje de la traslación, X, y el perpendicular:

$$P_x = mgsen\alpha \qquad P_y = mgcos\alpha$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = P_y \rightarrow N = mgcos\alpha$$

$$\sum F_x = ma_{CM} \rightarrow P_x - f_r = ma_{CM} \rightarrow \boldsymbol{mgsen\alpha - f_r = ma_{CM}} \ \ \boldsymbol{(1)}$$

Insistimos, la fuerza de rozamiento es de tipo estático y su valor es desconocido en principio.

En segundo lugar, estudiamos la rotación respecto del centro de masas:

$$M_{CM} = I\alpha \rightarrow$$

$$\boldsymbol{f_r \cdot R = I \cdot \alpha} \ \ \boldsymbol{(2)}$$

Añadimos la relación que hay entre la aceleración del centro de masas y la aceleración angular cuando hay rodadura sin deslizamiento:

$$\boldsymbol{a_{CM} = \alpha \cdot R} \ \ \boldsymbol{(3)}$$

Despejando α en la ecuación (3) y llevando esa expresión a las otras dos ecuaciones:

$$(2) \rightarrow f_r \cdot R = I \cdot \frac{a_{CM}}{R}$$

$$(1) \rightarrow mgsen\alpha - f_r = ma_{CM}$$

Y sustituyendo el valor de la fuerza de rozamiento despejada de (2) en la ecuación (1):

$$mgsen\alpha - I\frac{a_{CM}}{R^2} = ma_{CM} \rightarrow \boldsymbol{a_{CM}} = \frac{\boldsymbol{msen\alpha}}{\boldsymbol{m + \frac{I}{R^2}}}\boldsymbol{g}$$

Como vemos, la aceleración del centro de masas es tanto más pequeña cuanto mayor sea la relación $I/_{R^2}$. Para ver que cuerpos de los tres tiene mayor aceleración basta sustituir los momentos de inercia:

Esfera:

$$\boldsymbol{a_{CM\,esf}} = \frac{msen\alpha}{m + \frac{\frac{2}{5}mR^2}{R^2}} g = \boldsymbol{\frac{5}{7} sen\alpha \cdot g}$$

Cilindro hueco:

$$\boldsymbol{a_{CM\,cil.hueco}} = \frac{msen\alpha}{m + \frac{mR^2}{R^2}} g = \boldsymbol{\frac{1}{2} sen\alpha \cdot g}$$

Cilindro macizo:

$$\boldsymbol{a_{CM\,cil.macizo}} = \frac{msen\alpha}{m + \frac{\frac{1}{2}mR^2}{R^2}} g = \boldsymbol{\frac{2}{3} sen\alpha \cdot g}$$

Y dado que

$$\frac{5}{7} > \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

El cuerpo que más aceleración presenta es la esfera, seguida del cilindro macizo y, por último, el cilindro hueco.