POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

Este es uno de los temas más “arborescente” para nuestro gusto. No nos parece que aporte ideas importantes, si bien nos ayuda a pensar sobre las direcciones de los vectores y su relación con los rangos de las matrices que conforman. Por ello, al final se hace un resumen (y dibujado los casos en los que creemos que el dibujo es interesante). Para contestar en un examen, con ese resumen creemos que es suficiente

Hemos de decir que también podíamos utilizar propiedades geométricas para llegar a las mismas conclusiones. Excepto en el caso de dos rectas que así se ha hecho porque es más simple, en los demás casos hemos preferido distinguir los casos según los rangos de las matrices que forman el sistema. Como hemos dicho al principio, hay más casos de los que nos gustaría y hemos preferido homogenizarlos más que cansar con propiedades geométricas.

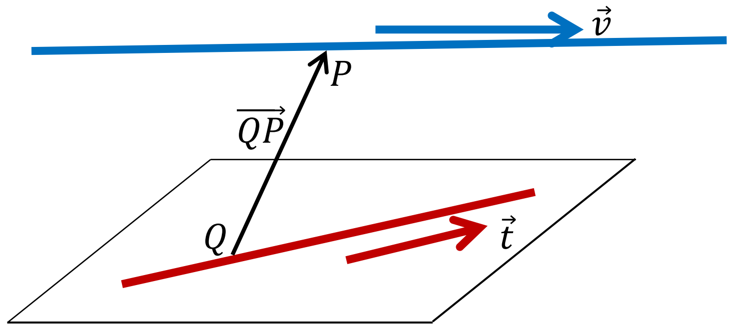
Como vamos a hablar de sistemas de ecuaciones, se recuerda que la matriz de los coeficientes la denotamos por *A* y la matriz ampliada por *B*

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS RECTAS

Dadas dos rectas, **deduciremos primero si son paralelas o no**. Es el caso más sencillo pues simplemente tenemos que deducir si los vectores que las definen son paralelos o no. Para ello impondremos la condición de paralelismo (**dos vectores son paralelos si y solo si sus componentes son proporcionales**). Si ambos vectores son paralelos podremos asegurar que ambas rectas son paralelas o son la misma. Para ver si son la misma o no, basta con coger un punto de una de ellas y sustituirlo en las ecuaciones que definen a la otra; si ese punto cumple también la ecuación de la otra es que ambas rectas son la misma.

Si no son paralelas pueden pasar dos cosas: se cortan en un punto, están en un mismo plano entonces, o se cruzan. Veamos cómo se distinguen

Sean las dos rectas de la figura roja y verde. Fijémonos en los tres vectores $\vec{v}, \vec{t}$ y $\overrightarrow{QP}$ donde Q y P son dos puntos arbitrarios, uno de cada recta. Según sean entre sí podemos distinguir



Se cruzan, como dos carreteras a distinto nivel

Tenemos que ver que si las rectas se cruzan **EL DETERMINANTE FORMADO POR LOS VECTORES $\vec{v}, \vec{t}$ y $\overrightarrow{QP}$ estará formado por tres vectores libres y por lo tanto SERÁ DISTINTO DE CERO. El rango de la matriz formada por ellos será tres.**

Se cortan en un punto formando un plano.

Si, por el contrario, las rectas se cortan en un punto **esos mismos tres vectores estarán en un mismo plano y EL DETERMINANTE FORMADO POR LOS TRES SERÁ CERO y el rango de la matriz será dos**.

Si las dos rectas son conocidas, aplicar las condiciones anteriores pensamos que no tiene ninguna dificultad. En el siguiente ejemplo, una de las rectas depende de un parámetro, a. Nos preguntan su posición relativa según los valores del parámetro.

Ejemplo

Calcular el valor de "a" para que la recta

$$\boldsymbol{r \equiv \frac{x-a}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}}$$

Se corte con la recta

$$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}}$$

De la primera recta ya conocemos el vector

$$\boldsymbol{\vec{v} = (2,3,4)}$$

El punto depende del valor de "a"

$$\boldsymbol{P(a,0,1)}$$

La segunda recta la pasamos a paramétricas, resolviendo el sistema, para conocer un punto de ella y su vector

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} z=\mu \\ y=-z=-\mu \\ x=-y=\mu \end{cases} \to \boldsymbol{\begin{cases} x=0+\mu \\ y=0-\mu \\ z=0+\mu \end{cases}}$$

De donde ya conocemos el vector

$$\boldsymbol{\vec{t} = (1,-1,1)}$$

Y el punto

$$\boldsymbol{Q(0,0,0)}$$

Ya estamos en condiciones de calcular el determinante y poder deducir para qué valores de "a" vale cero y las rectas se cortan.

$$\overrightarrow{PQ} = (-a,0,-1)\ \vec{v} = (2,3,4)\ \ \vec{t} = (1,-1,1)$$

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -7a + 5 = 0 \rightarrow a = \frac{5}{7}$$

Para otros valores de “a” las rectas se cruzarían.

POSICIONES RELATIVAS ENTRE PLANO Y RECTA

En el caso de recta y plano pueden ocurrir tres casos, según lo que ocurra al resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que se forman, dos ecuaciones de la recta y una del plano

Primer caso: La recta es paralela al plano

A la hora de resolver el sistema, al no haber solución, el rango de la matriz de los coeficientes será dos mientras que el de la matriz ampliada será tres.

$$\boldsymbol{rangA = 2 \neq rangB = 3 \rightarrow S.I.}$$

.

Segundo caso: la recta está contenida en el plano

En este caso, todos los puntos de la recta serán solución. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{rangA = rangB = 2 \rightarrow S.C.I.}$$

Con un parámetro, lo que nos indica que la solución es una recta, la recta dada, por estar contenida en el plano.

Tercer caso: la recta y el plano se cortan en un punto

Al ser la solución única, el sistema es compatible determinado. Por lo tanto

$$\boldsymbol{rangA = ranB = n^{o} inc\acute{o}gnitas = 3 \rightarrow S.C.D.}$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS PLANOS

El caso de dos planos, dos ecuaciones, es sencillo. Pueden pasar tres cosas:

Se cortan en una recta, son paralelos o son el mismo plano.

Sean los dos planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\pi_2 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

Se cortan según una recta si:

$$rangA = rangB = 2 < n^{\underline{o}} inc\acute{o}gnitas \rightarrow$$

S.C.I **con un parámetro: la solución es una recta**

Son paralelos si

$$rangA = 1 \neq rangB = 2$$

S.I. **sin solución**

Las dos ecuaciones representan el mismo plano si

Según los rangos:

$$rangA = rangB = 1 < n^{\underline{o}} inc\acute{o}g = 3$$

S.C.I. **con dos parámetros, por lo tanto, la solución es un plano. Representan el mismo plano.**

POSICIONES RELATIVAS ENTRE TRES PLANOS

Por ser tres ecuaciones con tres incógnitas hay bastantes más casos. Vamos a estudiar primero los casos en los que hay solución, los casos compatibles.

Sean las ecuaciones de los tres planos

$$\boldsymbol{\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0}$$

$$\boldsymbol{\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0}$$

$$\boldsymbol{\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0}$$

SISTEMAS COMPATIBLES

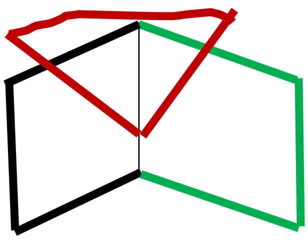
Primer caso: ***S.C.D***. Los tres planos se cortan en un punto

Las matrices que lo representan

$$\begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$$

Cumplen

$$\boldsymbol{rangA = ranB = 3 = n^{\underline{o}}\ de\ incógnitas \rightarrow S.C.D.}$$



Para calcular el punto de intersección basta con resolver el sistema formado por las tres ecuaciones de los tres planos.

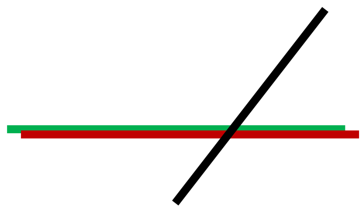
Segundo caso:

$$rangA = rangB = 2 < n^{o}\ incog = 3 \rightarrow S.C.I.\ con\ 1\ parámetro$$

La solución, **al depender de un parámetro, sabemos que representa a una recta**, ósea, los tres planos se cortan según una recta. Pero pueden pasar dos cosas:

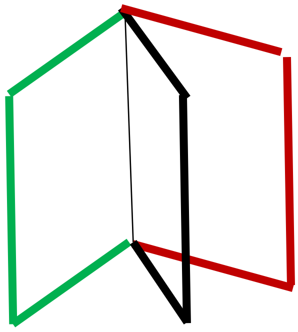
Segundo caso a:

Dos planos son el mismo y el tercero los corta según una recta. Este caso se distinguirá porque **dos ecuaciones tienen TODOS sus coeficientes proporcionales**, incluidos los términos independientes. Si eso no es así tenemos el segundo caso



Segundo caso b

Los tres planos se cortan en una recta, como tres hojas de un libro.



Tercer caso:

$$rangA = rangB = 1 < n1incóg. = 3 \rightarrow S.C.I.\ con\ 2\ parámetros$$

La solución depende de dos parámetros y sabemos que eso representa un plano: los tres planos son el mismo y todas las soluciones son los puntos de ese plano único.

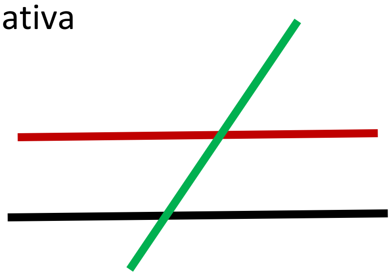
SISTEMAS INCOMPATIBLES

Primer caso

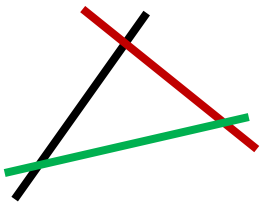
$$rangA = 2 \neq rangB = 3 \ \ SI$$

Si el rango de ***A*** es dos significa que los tres vectores directores de cada uno de los planos están en el mismo plano o dos de ellos son paralelos. Tenemos entonces dos casos

Primer caso a*:* Dos planos paralelos y el tercero los corta en **dos rectas paralelas**. Este caso se distingue mirando **si hay dos vectores de los tres que tengan sus componentes proporcionales**. Si es así esa es su posición relativa



Primer caso b*:* Si no se cumple la condición anterior es que los tres vectores directores están en un plano, pero ninguno es paralelo. Los tres planos se cortan en tres rectas paralelas, forman entonces un triángulo si los vemos de perfil (figura). Nos podemos imaginar una tienda de campaña de las clásicas.



Segundo caso

$$\boldsymbol{rangA = 1 \neq rangB = 2 \ \ SI}$$

Si el rango de $\boldsymbol{A}$ es uno es que sólo hay un vector director y los tres planos son paralelos**, pero puede pasar que dos de ellos sean el mismo. Para comprobar esto basta, como ya se ha dicho anteriormente, ver si TODOS los coeficientes en dos de ellos son proporcionales en dos ecuaciones.**

Sino ocurre esto, los tres planos son paralelos no coincidentes.

A continuación, hacemos el resumen de todos los casos. Creemos que es más visual y que de esa manera tampoco es tanto como parece mientras se está explicando. El caso de dos rectas no aparece en este resumen. La razón es que dos rectas son cuatro ecuaciones y el estudio por rangos se complica. El caso de dos rectas se estudia según se ha dicho en apartado dedicado a ello.

RESUMEN DE TODOS LOS CASOS

RECTA Y PLANO

Recta: dos ecuaciones. Plano: una ecuación. Sistema: tres ecuaciones con tres incógnitas

RangA=RangB=3 **S.C.D. Se cortan en un punto**
RangA=RangB=2 **S.C.I. Un parámetro. Recta contenida en el plano**
RangA=2≠RangB=3 **S.I. Recta paralela al plano**

DOS PLANOS

Sistema: dos ecuaciones con tres incógnitas

RangA=RangB=2 **S.C.I. Un parámetro. Se cortan en una recta**
RangA=RangB=1 **S.C.I. Dos parámetros. Son el mismo plano**
RangA=1≠RangB=2 **S.I. Son paralelos**

Sistema: tres ecuaciones con tres incógnitas

Sistemas compatibles

- ***RangA=RangB=3*** **S.C.D. Se cortan en un punto**
- ***RangA=RangB=2*** **S.C.I. Un parámetro. Se cortan en una recta**
  - **Dos planos coinciden y el tercero los corta**
  - **Tres planos distintos como las "hojas de un libro"**
- ***RangA=RangB=1*** **S.C.I. Dos parámetros. Los tres planos coinciden**

Sistemas Incompatibles

- ***RangA=2≠RangB=3***
  - **Dos planos paralelos y el tercero los corta. Dos rectas paralelas**
  - **Tres planos distintos. Se cortan en tres rectas paralelas. Vistos de "perfil" forman un triángulo**
- ***RangA=1≠RangB=2***
  - **Dos planos coinciden. El tercero es paralelo**
  - **Tres planos paralelos**