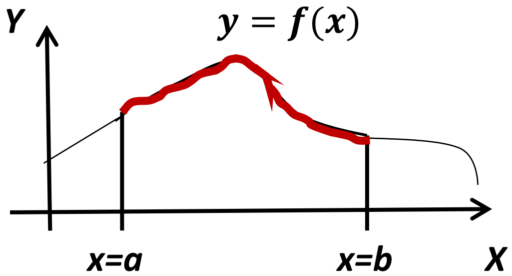
CALCULO DE LONGITUDES Y SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

LONGITUD DE UNA CURVA

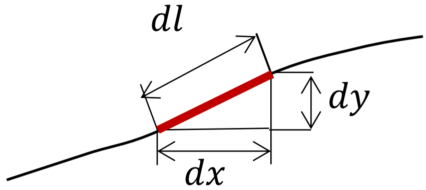
En este apartado es en el que menos nos vamos a extender pues entendemos que, en los problemas más o menos normales, la aplicación de la fórmula es suficiente y bastante sencilla. Advertir que una vez aplicada la fórmula conviene pararse un poco a simplificar el radicando que aparece en ella pues tal simplificación es muy normal que se pueda hacer para no estar demasiado tiempo con la integral (las integrales irracionales suelen ser largas).



La longitud de la parte de la curva entre $x = a\ y\ x = b$ viene dada por la fórmula:

$$\boldsymbol{L = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}$$

A modo de ejemplo, damos la demostración



Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos $dx\ y\ dy$

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \rightarrow |dividiendo\ entre\ (dx)^2| \rightarrow$$

$$\frac{(dl)^2}{(dx)^2} = 1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2} \rightarrow \left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \rightarrow$$

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \rightarrow dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \rightarrow$$

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}$$

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Cuando un trozo de curva gira en torno al eje X, la superficie de revolución se calcula con la ley:

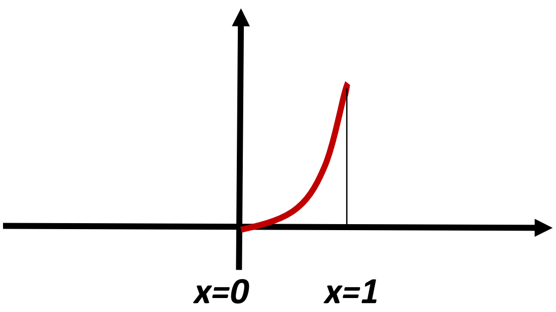
$$\boxed{S = \int_a^b \boldsymbol{2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}}$$

Veamos un ejemplo de cada caso:

Ejemplo

Calcular la longitud de la parábola $y = x^2$ entre x=0 y x=1

El dibujo de la función en estos casos no es muy necesario, pero siempre puede ser conveniente. Creemos que el dibujo de la parábola dado no es de comentar. Queremos calcular la longitud del trozo remarcado en rojo:



Para ello, claramente, utilizamos la fórmula dada

$$L=\int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+(f'(x))^2}=|f(x)=x^2\to f'(x)=2x|=$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+4x^2}dx$$

Debemos de recordar de las lecciones de “métodos de integración” que esta corresponde a una irracional cuadrática, donde la raíz aparece en el numerador. Como dijimos en esas lecciones, vamos a aplicar el método alemán:

$$\int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+4x^2}dx=\int_{x=0}^{x=1}\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx$$

Hemos multiplicado numerador y denominador por la raíz para que el integrando quede en la forma que nos permita aplicar la fórmula del método alemán. Hacemos la indefinida, no va a haber ningún cambio de variable.

$$\int\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx=(ax+b)\sqrt{1+4x^2}+\mu\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$$

Derivando ambas expresiones:

$$\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}=a\sqrt{1+4x^2}+(ax+b)\frac{1}{2\sqrt{1+4x^2}}8x+\mu\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$$

Operando la suma de la derecha

$$\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{a\left(\sqrt{1+4x^2}\right)^2+4x(ax+b)+\mu}{\sqrt{1+4x^2}}$$

E igualando numeradores

$$1+4x^2=a(1+4x^2)+4x(ax+b)+\mu\to$$

$$x=0\to \mathbf{1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\mu}$$
$$x=1\to \mathbf{5}=\mathbf{5}\boldsymbol{a}+\mathbf{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{\mu}$$
$$x=-1\to \mathbf{5}=\mathbf{5}\boldsymbol{a}-\mathbf{4}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{\mu}$$

Resolviendo el sistema, las soluciones son:

$$a=\frac{1}{2}$$
$$b=0$$
$$\mu=\frac{1}{2}$$

Quedando la integral:

$$\int\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}=\color{red}{(1)}$$

Debemos de saber de la tabla de inmediatas (en “negrita”):

$$\int\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{a^2}}}\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{Ln}\left(\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{a^2}}\right)\to\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}}=\frac{1}{2}Ln\left(x+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\right)$$

Sustituyendo en $\color{red}{(1)}$

$$\int\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}Ln\left(x+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\right)$$

Quedando, por lo tanto, la definida de la siguiente manera:

$$L=\int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+4x^2}dx=\int_{x=0}^{x=1}\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx=$$

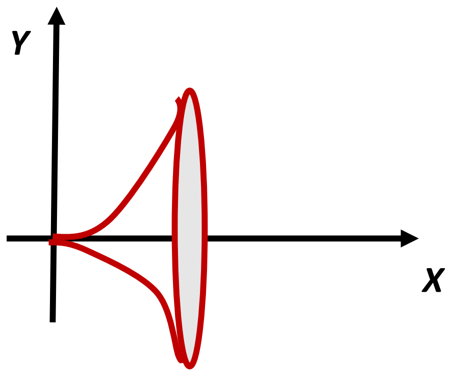
$$\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}Ln\left(x+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\right)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}Ln\left(1+\sqrt{\frac{5}{4}}\right)-\frac{1}{4}Ln\sqrt{\frac{1}{4}}\ u$$

Como ya hemos comentado en otras ocasiones, esta integral cuadrática irracional se puede hacer por cambios trigonométricos mucho mas engorrosos y variados que el método alemán. Pero…para gustos están los colores.

Ejemplo

Calcular la superficie de revolución producida por el mismo segmento de la curva anterior al girar sobre el eje de las "X".



Hemos de calcular el área lateral de la "trompeta" formada al girar el trozo de la parábola alrededor del eje ***X.*** Aplicamos, como no podía ser de otra manera la fórmula>:

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

$$S=\int_0^1 2\pi x^2\sqrt{1+(2x)^2}dx=2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+(2x)^2}dx$$

Como en el caso anterior, vamos a resolver la indefinida. Para ello, multiplicamos numerador y denominador por la raíz para poder aplicar la fórmula del método alemán:

$$\int x^2\sqrt{1+4x^2}dx = \int \frac{x^2(1+4x^2)}{\sqrt{1+4x^2}} = |fórmula| =$$

$$(ax^3+bx^2cx+d)\sqrt{1+4x^2}+\mu\int\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$$

Ya hemos visto como se calculan las letras. Una vez calculadas, la integral que tenemos que resolver es la que aparece en último término:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}dx =$$

$$\frac{1}{2}Ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|$$

La superficie de revolución quedaría entonces:

$$S = \left[(ax^3+bx^2cx+d)\sqrt{1+4x^2}+\mu\frac{1}{2}Ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]_0^1$$

Acabar los cálculos lo dejamos al lector si todavía tiene ganas, pensamos que no tenemos nada que enseñar al respecto si se han visto las lecciones anteriores.