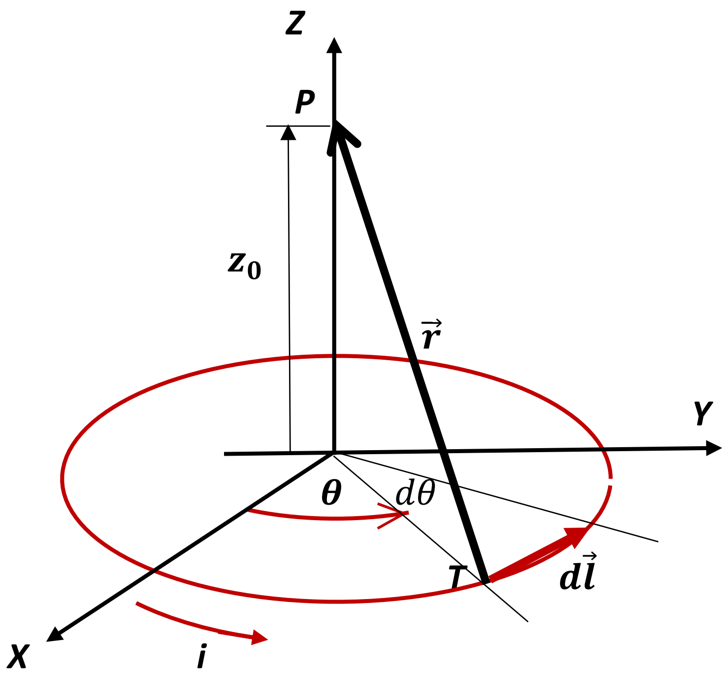
CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA ESPIRA CIRCULAR EN UN PUNTO DE SU EJE

Sea la espira circular de radio ***R*** apoyada en el plano ***XY***. Queremos calcular el campo magnético que crea en el punto ***P*** del eje ***Z*** de coordenada $z = z_0$.

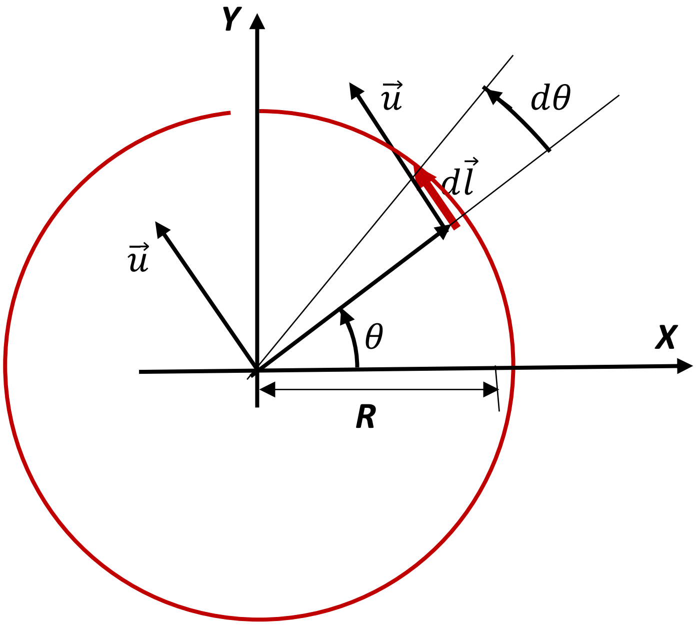


Vamos a la ley de Biot y Savart al elemento infinitesimal $d\vec{l}$ de corriente que crea un campo magnético infinitesimal también en el punto P. Nuestra variable va a ser el ángulo θ que en los límites de integración tomará los valores desde cero hasta 2π. El método, por lo tanto, nos serviría también para calcular el campo magnético creado por un trozo de espira circular sin más que cambiar los límites de integración.

$$d\vec{\beta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}$$

Y, para integrar, vamos a poner todos los factores de la ley en función del ángulo θ:

Veamos primero el cálculo de $d\vec{l}$



Para calcular sus coordenadas sólo tenemos que conocer su módulo y un vector unitario en su dirección y sentido:

Módulo: como abarca una longitud de la circunferencia de radio R limitada por el ángulo $d\theta$ su módulo es

$$|d\vec{l}| = Rd\theta$$

Vector unitario en su dirección y sentido: vemos en la figura que un vector en su dirección y sentido es el vector $\vec{u}$ que forma con el eje ***X*** positivo un ángulo $\frac{\pi}{2} + \theta$ por lo que el vector $\vec{u}$, de módulo la unidad, será:

$$\vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\vec{\imath} + sen\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\vec{\jmath} = -sen\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$$

$$\boldsymbol{\vec{u} = -sen\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}}$$

Y el vector $d\vec{l}$ será, por lo tanto, el producto de su módulo por el vector unitario en su dirección y sentido, $\vec{u}$.

$$\boldsymbol{d\vec{l} = Rd\theta(-sen\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})}$$

Ahora calculamos el vector $\vec{r}$ que va desde este elemento infinitesimal de corriente hasta el punto ***P*** donde queremos calcular el campo magnético. **Según la primera figura**, este vector es el vector $\overrightarrow{TP}$ siendo las coordenadas de estos puntos:

$$T\ (Rcos\theta, Rsen\theta, 0)$$

$$P(0,0,z_0)$$

Entonces, el vector $\vec{r}$

$$\boldsymbol{\vec{r} = -Rcos\theta\vec{\imath} - Rsen\theta\vec{\jmath} + z_0\vec{k}}$$

De módulo $r = \sqrt{R^2 + z_0^2}$

Por lo tanto, el campo magnético creado por este elemento de corriente es, aplicando la ley:

$$\boldsymbol{d\vec{\beta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}}$$

$$d\vec{\beta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i\left[Rd\theta(-sen\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}) \times (-Rcos\theta\vec{\imath} - Rsen\theta\vec{\jmath} + z_0\vec{k}\right]}{(\sqrt{R^2 + z_0^2})^3}$$

Lo que viene ya a continuación es simple cálculo. Efectuando el producto vectorial:

$$d\vec{\beta} = \frac{\mu_0 iR^2 d\theta}{4\pi(R^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (z_0 cos\theta\vec{\imath} + z_0 sen\theta\vec{\jmath} + \vec{k})$$

E integrando cada componente:

$$\vec{\beta} = \frac{\mu_0 iR^2}{4\pi(R^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}(z_0\vec{\imath}\int_0^{2\pi} cos\theta d\theta + z_0\int_0^{2\pi} sen\theta d\theta + \vec{k}\int_0^{2\pi} d\theta)$$

Las dos primeras integrales son nulas. Podíamos haber tenido en cuenta al principio que las componentes en el plano ***XY*** de los campos infinitesimales **creados por dos elementos de corriente "enfrentados" en la circunferencia que forma la espira se anulaban** y que, por lo tanto, el campo magnético sólo tenía componente vertical. No hemos querido tenerlo en cuenta por dos razones. La primera es que queremos demostrar que si somos rigurosos con el planteamiento no nos hace falta ver "atajos" (aunque a veces esto es muy interesante por comodidad) y la segunda es que con este planteamiento podemos también calcular, como ya se ha dicho, **el campo magnético creado sólo por un trozo de espira circular**. Nos queda entonces:

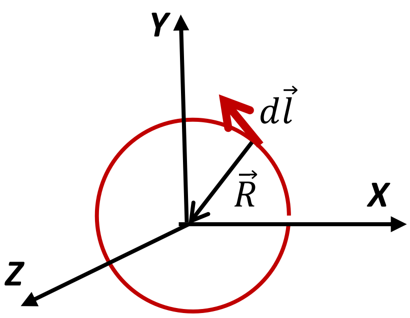
$$\vec{\beta} = \frac{\mu_0 i R^2}{4\pi(R^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k} \int_0^{2\pi} d\theta) =$$

$$\boldsymbol{\vec{\beta} = \frac{\mu_0 i R^2}{2\left(R^2 + z_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}}$$

Si queremos calcular el campo en el centro de la espira:

$$z_0 = 0 \rightarrow \boldsymbol{\vec{\beta} = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{k}}$$

Conclusión a la que hubiéramos llegado mucho antes estudiando el caso particular (pero, insistimos, el método aplicado nos permite calcular campos más generales, como por ejemplo en el interior de un solenoide que veremos más adelante). En ese caso hubiéramos hecho:



$$\vec{\beta} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{R^3} = \vec{k} \frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} \cdot \oint dl \cdot R \cdot sen\frac{\pi}{2} = \vec{k} \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} L = \vec{k} \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} 2\pi R$$

$$\boldsymbol{\vec{\beta} = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{k}}$$

Como ya sabíamos. El ángulo de ***90*** que aparece en la integral es el ángulo que forman los vectores $\vec{R}$ y $d\vec{r}$.