RANGO DE UNA MATRIZ

En muchos problemas de aplicación del cálculo matricial es importante saber cuántas filas libres contiene una matriz. Entendemos como filas libres a las que no se pueden obtener por sumas o restas de las demás multiplicadas por números.

Por ejemplo, la matriz siguiente tiene rango uno, puesto que la segunda fila es la primera multiplicada por 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Si esa matriz representara, como veremos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 5y = 4 \\ 3x + 15y = 12 \end{cases}$$

Que el rango sea uno significa que NO TENEMOS UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS. Sólo hay una ecuación libre.

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

El cálculo del rango de una matriz se puede hacer de dos maneras. Utilizar un método u otro depende de que tipo de matriz tengamos. Nosotros aconsejamos utilizar el primer método, de triangulación o de Gauss, si todos los elementos de la matriz son números. En el caso de que haya elementos desconocidos, pensamos que es mejor el segundo método, según el orden del mayor determinante que contenga.

1. MÉTODO DE GAUSS O TRIANGULACIÓN:

Se basa en que el rango de una matriz no cambia si sustituimos una fila por una combinación lineal de ella con las demás (a esa fila se la puede multiplicar por un número y sumarle otra multiplicada también por un número). Con los elementos de la diagonal principal se hacen ceros debajo de ellos, empezando por el elemento a_{11}. Una vez que debajo de él hay ya todos ceros, seguimos con el elemento a_{22} y así sucesivamente. Una vez tenemos todos ceros debajo de la diagonal principal**, el rango de la matriz es el número de filas distintas de cero que nos han quedado.** Como siempre, un ejemplo es fundamental para entender la idea. Veamos:

Ejemplo

En la siguiente matriz, cogemos el elemento $a_{11} = 1$ para hacer ceros debajo de él, sumando a la segunda fila y tercera fila la primera multiplicada por los números necesarios para ello:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim |2^{\text{a}}F \to 2^{\text{a}}F + 1^{\text{a}}F \cdot (-2)| \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 6 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim |3^{\text{a}}F \to 3^{\text{a}}F + 1^{\text{a}}F \cdot (-6)| \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 14 & -20 \end{pmatrix}$$

Ya hemos hecho ceros debajo del elemento a_{11}. A continuación, con el elemento a_{22} (7), hacemos lo mismo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 14 & -20 \end{pmatrix} \sim |3^{\text{a}}F \to 3^{\text{a}}F + 2^{\text{a}}F \cdot (-2)| \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que ya hay todo ceros debajo de la diagonal principal. **Como han quedado sólo dos filas distintas de cero el rango de esta matriz es dos.**

Este método va muy bien, como hemos dicho, si dentro de la matriz NO hay parámetros

2. MÉTODO DEL DETERMINANTE.

El rango de una matriz coincide con el orden del mayor determinante que se puede formar con ella. **Este método, como se ve en la lección de resolución de sistemas, es mejor cuando en la matriz hay parámetros**. Sino los hay, como se ha dicho en el párrafo anterior, el mejor método es el de Gauss-triangulación.

Ejemplo

Utilizamos este método para calcular el rango de la matriz anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Como sólo contiene un determinante de tercer orden, vamos a calcularlo. Si nos diera distinto de cero, el rango de la matriz sería tres (como ya sabemos que el rango es dos, este determinante ha de ser nulo)

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$4 - 8 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot (-14) = 0$$

Donde hemos desarrollado el determinante por los adjuntos de la primera fila (aunque, evidentemente, se puede desarrollar por Sarrus). Al darnos cero el determinante de tercer orden, sabemos que el rango es dos o uno.

Si cogemos el determinante de segundo orden de la esquina superior izquierda

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

Por lo tanto, el rango es dos porque este determinante de segundo orden es distinto de cero. Si este determinante nos hubiera dado cero, el rango no tiene porqué ser uno: **el rango será uno si todos los determinantes de segundo orden valen cero**