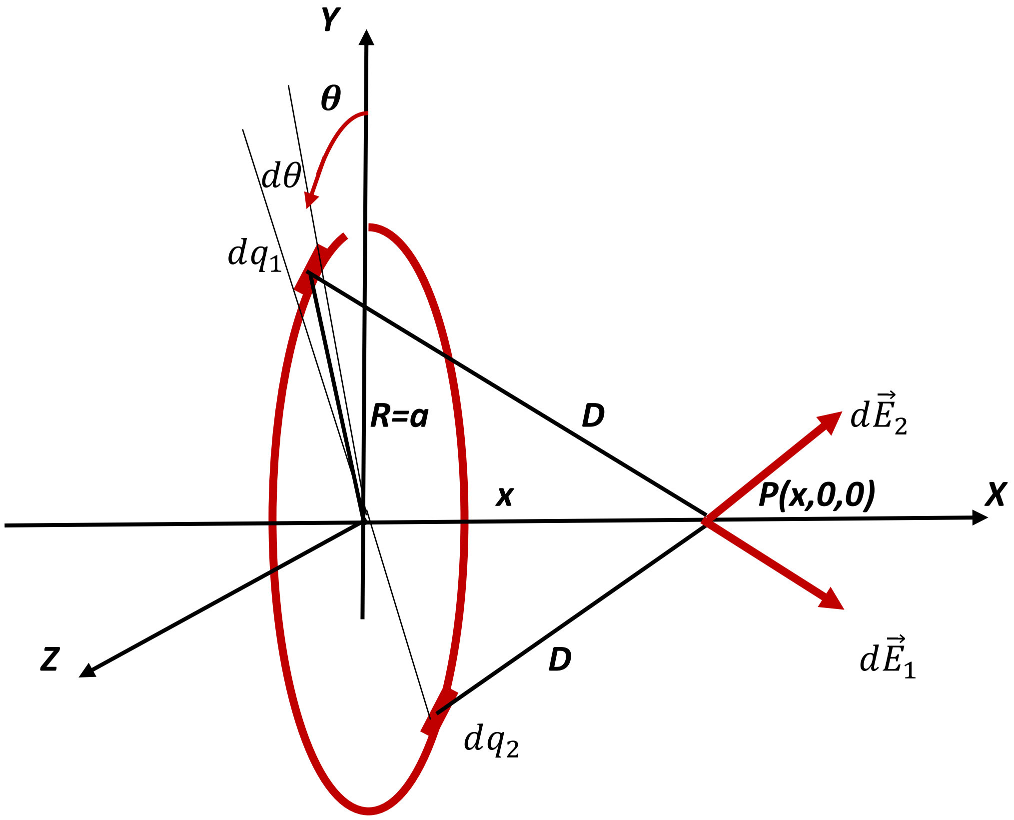
Ejemplo 4

Demostrar que el campo eléctrico producido por una carga anular de densidad constante en los puntos de su eje tiene su módulo máximo en $x_1 = +\frac{a}{\sqrt{2}}$ y en $x_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ siendo a el radio del anillo. Representar el módulo del campo en función de "x" para todos sus valores.



.

En los problemas anteriores, para calcular el campo en un punto hemos utilizado como parte importante de dicho cálculo el vector unitario en su dirección y sentido. En este caso vamos a simplificar el problema, dada la simetría de la carga respecto al eje ***OX.***

Si nos damos cuenta, la dirección del campo total es la del eje ***X*** pues las componentes ***Y Z*** del campo infinitesimal creado por una carguita infinitesimal dq_1 quedan contrarrestadas por el campo infinitesimal creado por la carguita dq_2 que está enfrente suyo en el anillo. Podemos entonces simplificar el problema sin tener que trabajar con el vector unitario en las tres dimensiones para integrar cada componente después. Vamos a calcular el campito infinitesimal en la dirección del eje X producido por una carga genérica posicionada por el ángulo θ y después los sumaremos por medio de la integral para calcular el campo total que, como hemos dicho, va en esa dirección.

Campo infinitesimal en la dirección eje X creado por la carguita dq_1:

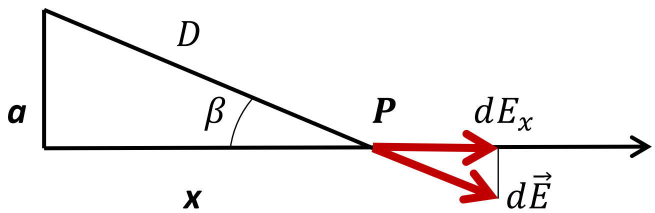
$$dq_1 = \lambda dl = \lambda a d\theta$$

Donde, de otros problemas, sabemos que un trocito infinitesimal de longitud de arco sobre una circunferencia de radio ***R*** es $Rd\theta$. En nuestro caso el radio del anillo es $\boldsymbol{a}$ y por lo tanto $dl = ad\theta$

La distancia ***D*** de esta carguita al punto ***P*** donde estamos calculando el campo es, ver figura, la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son ***x*** y ***a***. Por lo tanto:

$$D = \sqrt{x^2 + a^2}$$

Como queremos calcular la componente del campo $d\vec{E}$, que va en la dirección del eje X vamos a dibujar el triángulo rayado y el vector $d\vec{E}$ vistos de frente:



Módulo de $d\vec{E}$:

$$dq = \lambda a d\theta \rightarrow \boldsymbol{dE} = k\frac{dq}{D^2} = \boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{\lambda a d\theta}}{\boldsymbol{x^2 + a^2}}$$

Cuya componente dE_x es

$$\boldsymbol{dE_x} = dE \cdot cos\beta = \left|cos\beta = \frac{x}{D} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right| = \boldsymbol{k \frac{\lambda a d\theta}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}} \rightarrow$$

$$E = E_x = \int_0^{2\pi} k \frac{\lambda a d\theta}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = |x = cte.| = k \frac{\lambda a x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E = k \frac{\lambda a x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi = |2\pi a\lambda = Q_{anillo}| = k \frac{Q_a}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} x$$

$$\boldsymbol{E = k \frac{Q_a}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} x}$$

Que en forma vectorial podemos poner

$$\boldsymbol{\vec{E} = k \frac{Q_a}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} x \cdot \vec{i}}$$

Ya que el sentido coincide con el de x (hacia la derecha para *x* positivas y hacia la izquierda para *x* negativas pues la carga del anillo es positiva. Si la carga hubiera sido negativa simplemente el campo cambiaría de signo –como no podía ser de otra manera-.)

Para demostrar lo que nos preguntan, en qué puntos su módulo es máximo, sólo tenemos que derivar respecto de la variable x

$$\left(k \frac{Q_a}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} x\right)' = kQ \frac{1 \cdot (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - x \frac{3}{2} (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} 2x}{(x^2 + a^2)^3}$$

Que igualando a cero (máximo de una función)

$$1 \cdot (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - x \frac{3}{2} (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} 2x = 0 \rightarrow$$

$$(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} = 3x^2 (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x^2+a^2)^3 = 9x^4(x^2+a^2) \to (x^2+a^2)^2 = 9x^4 \to$$

$$x^2+a^2 = \pm 3x^2$$

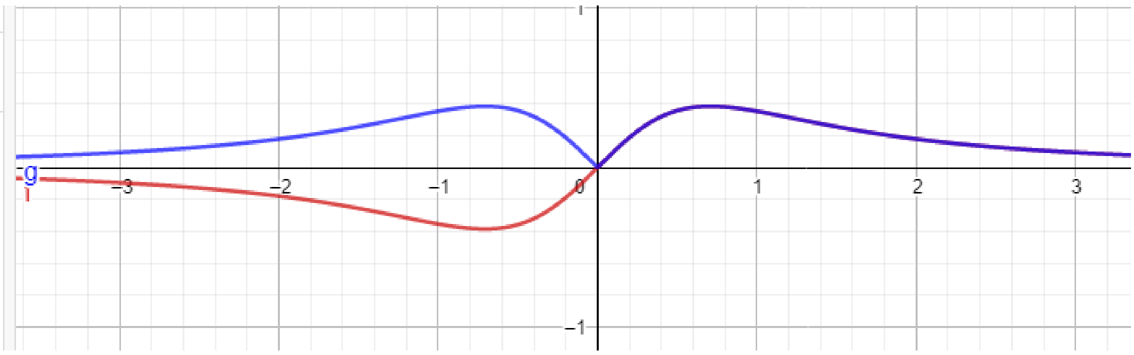
De donde, con el signo más (eligiendo el signo menos no existe solución real) nos queda:

$$\boldsymbol{x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}}$$

Como se pedía.

La gráfica del campo respecto de la variable "x":

$$\boldsymbol{E = k\frac{Q_a}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}x}$$



La gráfica sería más o menos así, en azul, pues hemos dibujado el **módulo del campo.** Para dibujarla, se ha dado **el valor de la unidad al radio**, ***a, del anillo.*** La gráfica roja es teniendo en cuenta el signo de la variable "x" pero, insistimos, la gráfica del módulo del campo es la azul. No se ha hecho un estudio pormenorizado de la función, sabiendo que pasa por el origen, es simétrica respecto al eje Y (estamos dibujando el módulo, para "x" negativas le cambiamos de signo) y los límites cuando $x \to \pm\infty$ valen cero creemos que es suficiente. En ella se observan los máximos calculados.

OTRA MANERA:

El potencial creado por el anillo en el punto P es muy fácil de calcular pues toda la carga está a la misma distancia del punto P.

$$dV = k\frac{dq}{D} = k\frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$V = \int k\frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^2}}\int dq = k\frac{Q_a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\boldsymbol{V = k\frac{Q_a}{\sqrt{x^2 + a^2}}}$$

La relación matemática que relaciona el potencial con el campo, en forma diferencial, es:

$$\boldsymbol{\frac{\delta V}{\delta x}\vec{\imath} + \frac{\delta V}{\delta y}\vec{\jmath} + \frac{\delta V}{\delta z}\vec{k} = -\vec{E}}$$

En nuestro caso, el estar en una sola dirección:

$$\frac{dV}{dx}\vec{\imath} = -\vec{E} \rightarrow$$

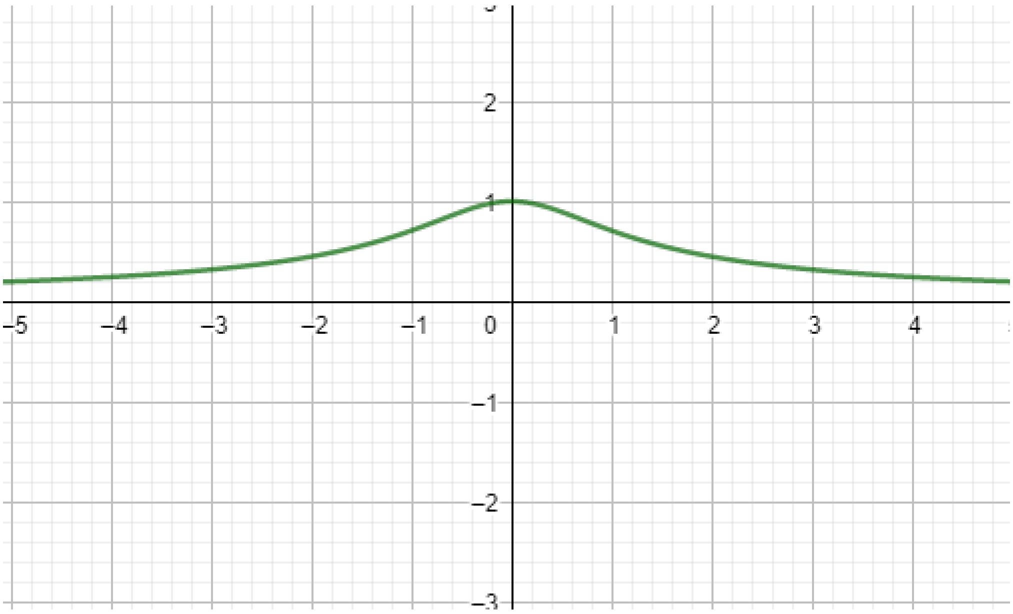
$$\vec{E} = -\frac{-kQ_a \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + a^2}}2x}{x^2 + a^2}\vec{\imath} = k\frac{Q_a}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}x\vec{\imath}$$

Como sabíamos. Como vemos, ha sido más corto y sencillo. Sin embargo, hemos preferido que las dos maneras de cálculo del campo, aplicando la definición y esta última, quedaran claras.

Por último, vamos a dibujar la función potencial:

$$\boldsymbol{V = k\frac{Q_a}{\sqrt{x^2 + a^2}}}$$

Dado que Q_a es positiva, la gráfica es también positiva. Es simétrica respecto eje Y. Además, cuando $x \rightarrow \pm\infty$ el potencial tiende a cero y, si hallamos los máximos y mínimos, vemos que tiene un máximo en $x = 0$ (el denominador es mínimo para $x = 0$)

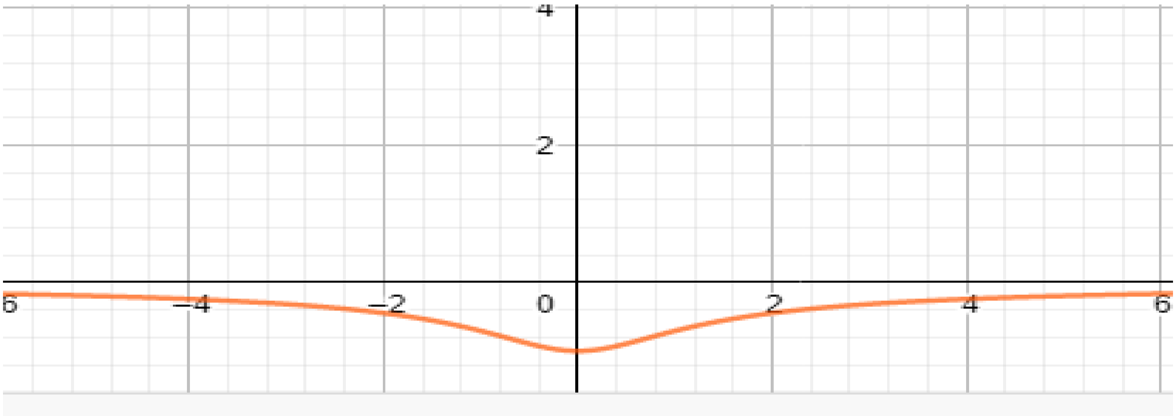


Este es el potencial creado por el anillo. Las unidades de los ejes se han elegido arbitrarias. Si ahora cogemos una carga positiva, su energía potencial sería:

$$E_p = qV$$

Que sería una gráfica parecida a la anterior pues resulta de ella al multiplicarla por un número positivo. El punto máximo sería un punto de equilibrio inestable pues si se separa un poquito de él "rodaría" alejándose indefinidamente hacia la izquierda o la derecha según fuera la desviación inicial.

Sin embargo, la energía potencial de una carga negativa sería la misma gráfica, pero hacia abajo:



Y observamos que para ellas el origen es un punto de equilibrio estable. Veamos qué movimiento se produce si una carga negativa la separamos un poquito del centro:

$$\boldsymbol{\vec{E} = k\frac{Q_a}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}x\vec{\imath}}$$

Por lo que la fuerza sobre una carga negativa sería:

$$\vec{F} = q\vec{E} = -k\frac{Q_a}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}|q|x\vec{\imath}$$

De donde podemos deducir varias cosas:

a) Si $x \ll a \rightarrow x^2 + a^2 \cong a^2 \rightarrow$

$$\vec{F} = -k\frac{Q_a}{a^3}|q|x\vec{\imath}$$

b) Para $x > 0 \rightarrow$ la fuerza es hacia la izquierda $(q < 0)$

c) Para $x < 0 \rightarrow$ la fuerza es hacia la derecha

Dado que

$$\boldsymbol{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \rightarrow \vec{a} = -k\frac{Q_a}{ma^3}|q|x\vec{\imath}}$$

De donde deducimos que la aceleración es proporcional a la posición (elongación) pero cambiada de signo. Cumple por lo tanto la definición de movimiento armónico, M.A.S.

$$\boldsymbol{a = -\omega^2 x}$$

En nuestro caso:

$$a = -k\frac{Q_a}{ma^3}|q|x$$

De donde, comparando con definición de M.A.S.

$$\omega^2 = k\frac{Q_a}{ma^3}|q|$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{kQ_a|q|}{ma^3}}} = 2\pi a\sqrt{\frac{ma}{kQ_a|q|}}$$

$$\boldsymbol{T = 2\pi a\sqrt{\frac{ma}{kQ_a|q|}}}$$