INTERSECCIÓN DE RECTAS

Para calcular el punto de intersección de dos rectas basta con resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formadas por ellas. Si el sistema sale incompatible (sin solución) es que las dos rectas son paralelas, comprobándolo viendo que se cumple el paralelismo de sus vectores. Si sale compatible indeterminado (muchas soluciones) significa claramente que las dos rectas son en realidad la misma, comprobando que los términos A, B, C de la ecuación en forma general $Ax + By + C = 0$ de ambas rectas son proporcionales. Veamos tres ejemplos, cada uno de ellos representando los tres casos mencionados.

Ejemplo 1

Calcular la intersección de las rectas

$$\begin{cases} \boldsymbol{r \equiv x + y + 1 = 0} \\ \boldsymbol{s \equiv 3x - y + 3 = 0} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} (1)\ x + y + 1 = 0 \\ (2)\ 3x - y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow |(1) + (2)| \rightarrow 4x + 4 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$$

$$x = -1 \rightarrow |(1)| \rightarrow -1 + y + 1 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$$

El punto de intersección es

$$I = (-1,0)$$

Como podemos comprobar gráficamente dibujándolas.

Ejemplo 2

Calcular la intersección de las rectas

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+1=0} \\ \boldsymbol{2x+2y-4=0} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} (1)\ x+y+1=0 \\ (2)\ 2x+2y-4=0 \end{cases} \rightarrow |1^{a}\cdot(-2)+2^{a}| \rightarrow \boldsymbol{-6=0}$$

Llegamos a una ecuación “absurda” lo que significa que las dos rectas no tienen ningún punto en común. Son paralelas. También podemos razonar viendo que sus vectores perpendiculares, (1,1) y (2,2), son paralelos, uno el doble que el otro. Sin embargo, los términos independientes no guardan esa relación, no son uno el doble que el otro, concluimos por ello también que son paralelas.

Ejemplo 3

Calcular la intersección de las rectas

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+1=0} \\ \boldsymbol{2x+2y+2=0} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema

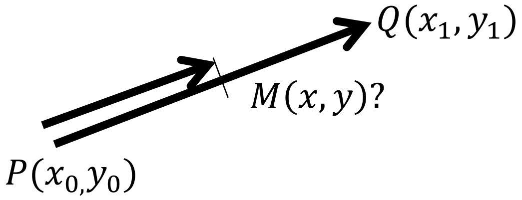
$$\begin{cases} (1)\ x+y+1=0 \\ (2)\ 2x+2y+2=0 \end{cases} \rightarrow |1^{a}\cdot(-2)+2^{a}| \rightarrow 0=0$$

Llegamos a una identidad, eso quiere decir que las dos ecuaciones son ciertas para cualquier valor de las incógnitas. Realmente, sólo tenemos una ecuación. Fijarse que los vectores son paralelos porque sus componentes son proporcionales, uno el doble que el otro, y que los términos independientes guardan esa misma relación. Sólo tenemos una recta y no dos.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN "N" PARTES IGUALES

Es muy normal que queramos calcular el punto medio de un segmento, o calcular los puntos del segmento que lo dividen en tres partes… O en "n" partes. Veamos cómo se divide en dos el segmento $\overline{PQ}$, que es lo más normal.

Queremos calcular el punto medio, M, del segmento formado por los puntos P y Q



En la figura observamos que se cumple claramente:

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} \rightarrow (x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{2}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \frac{1}{2}(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = \frac{1}{2}(y_1 - y_0) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{x_0 + x_1}}{\boldsymbol{2}} \\ \boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{y_0 + y_1}}{\boldsymbol{2}} \end{cases}$$

Insistimos, este caso es muy normal y conviene, porque es muy fácil, aprenderse la fórmula anterior. En el siguiente ejemplo vamos a dividir a un segmento en tres partes iguales. Pero, al contrario que en el ejemplo anterior, lo vamos a hacer con valores concretos.

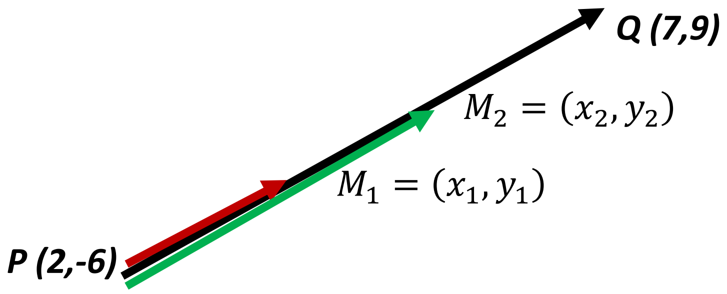
Ejemplo 4

Dividir el segmento formado por los puntos P (2,-6) y Q (7, 9) en tres partes iguales

Como comentamos repetidamente, hacemos un dibujo:

.

.



Creemos que es fácil entender las dos ecuaciones siguientes, que nos permitirán deducir los puntos M_1 y M_2

$$\begin{cases} \overrightarrow{\boldsymbol{PM_1}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{PM_2}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} \end{cases}$$

Resolvemos sólo la primera. La segunda es exactamente igual.

$$\begin{cases} \overrightarrow{PM_1} = \left(x_1 - 2, y_1 - (-6)\right) \\ \overrightarrow{PQ} = (7 - 2, 9 + 6) = (5, 15) \end{cases} \rightarrow$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PM_1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} \rightarrow \left(x_1 - 2, y_1 - (-6)\right) = \frac{1}{3}(5, 15) \rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 2 = \dfrac{5}{3} \rightarrow \boldsymbol{x_1} = \dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}} \\ y_1 + 6 = \dfrac{15}{3} \rightarrow \boldsymbol{y_1} = \mathbf{-1} \end{cases}$$