TIPO 2 CAMBIO DE VARIABLE

Este es un tipo de transformación muy importante y que nos va evitar utilizar tablas con multitud de fórmulas, o acordarnos de ellas de memoria. Hay muchas tablas en las que en vez de aparecer funciones elementales de ***"x"***, como en la nuestra, aparecen funciones de ***"x"*** y sus funciones derivadas. Esas tablas las podemos olvidar, todas esas fórmulas provienen de la estrategia que vamos a explicar (aunque sabemos que vais a ser reticentes a ello porque, aparte de que aparezcan en muchos textos, también se suelen explicar así en clase. Por eso integrar parece muy difícil cuando en realidad no lo es).

Es el momento de hablar de ese símbolo que aparece siempre en una integral, el **dx, llamado diferencial de x.** En estas lecciones pretendemos solamente que sepamos integrar a nivel "formal". En las lecciones en las que hablemos de las aplicaciones de la integral, intentaremos "visualizar" su significado. Pero, insistimos, aquí vamos a integrar "formalmente".

Que hagamos un cambio de variable significa que a una función de ***"x"*** que aparezca en el integrando la vamos a llamar ***"t"***, por ejemplo. Entonces, en la integral aparecerá la variable ***"t"*** en vez de la variable ***"x"***. Por eso se llama cambio de variable.

Por ejemplo, en la integral

$$\int (x^2+1)^7 \cdot x \cdot dx$$

Podemos hacer el cambio siguiente, independientemente de que funcione o no

$$x^2+1=t$$

En la integral aparecerá ahora la nueva variable **"t"**. Pero entonces tiene que aparecer ***"dt" y no "dx".*** **¿Cómo relacionamos los dos diferenciales?**

Si recordamos la definición de derivada, esta es el cociente del incremento de la función "y" entre el incremento de la variable "x" cuando este último tiende a cero:

$$\boldsymbol{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$$

Cuando un incremento tiende a cero se llama DIFERENCIAL. Por ello

$$\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$$

Volviendo a nuestro cambio de variable

$$t = x^2 + 1 \rightarrow t' = \frac{dt}{dx} = 2x \rightarrow \boldsymbol{dt = 2xdx}$$

Y así podemos relacionar los diferenciales.

Vaya rollo, ¿verdad? Ahora, como es nuestra forma de explicar, vamos a hacer unos cuantos ejemplos para que quede claro cómo se trabaja, que es lo que pretendemos. Pero hay que saber muy bien lo que hemos dicho.

Antes de ir a los ejemplos, decir que hay dos cambios de variable que funcionan siempre y que son de los que vamos a hablar en esta lección:

PRIMER CAMBIO DE VARIABLE: CUALQUIER FUNCIÓN LINEAL de "x" LA LLAMAREMOS "t"

$$\boldsymbol{ax+b=t}$$

Este cambio va a funcionar siempre porque la relación entre los diferenciales es lineal

$$t=ax+b\rightarrow t'=\frac{dt}{dx}=a\rightarrow dx=\frac{1}{a}dt$$

Y, simplemente, aparecerá esa constante, ***1/a***, multiplicando a todo el integrando y la podremos sacar fuera.

Ejemplo 1
Calcular la integral:

$$\int \boldsymbol{sen(3x+4)dx}$$

Como hemos dicho, llamamos "t" a la función lineal, aparezca donde aparezca, en este caso dentro de un seno, pero, insistimos, eso no nos importa

$$\boldsymbol{3x+4=t}$$

$$\int sen(3x+4)dx=\left|\boldsymbol{3x+4=t}\rightarrow\frac{dt}{dx}=3\rightarrow \boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{3}}\right|\rightarrow$$

Quisiéramos que se vea que ***"t"*** es una función de ***"x"*** y que, al derivar, hemos relacionado los diferenciales. Después, hemos despejado "dx" en función de "dt" para, en la siguiente línea, sustituirlo a él y a la función $\boldsymbol{3x+4}$ en la integral que nos han dado

$$\int sen(3x+4)dx=\int sent\cdot\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int sentdt=\frac{1}{3}(-cost)$$

Ahora, una vez que hemos integrado porque hemos llegado a una integral inmediata en "t", descambiamos la variable

$$=-\frac{1}{3}cost=-\boldsymbol{\frac{1}{3}cos(3x+4)+C}$$

Ejemplo 2
Calcular la integral

$$\int \frac{\mathbf{23}\boldsymbol{dx}}{(\mathbf{6}\boldsymbol{x}+\mathbf{11})^{\mathbf{4}}}$$

Como en la anterior, llamamos a la función lineal "t"

$$\int \frac{23dx}{(6x+11)^4} = \left| \mathbf{6}\boldsymbol{x}+\mathbf{11}=\boldsymbol{t} \rightarrow \frac{dt}{dx}=6 \rightarrow \boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{dt}}{\mathbf{6}} \right| =$$

$$\int \frac{23\frac{dt}{6}}{t^4} = \frac{23}{6}\int t^{-4}dt = \frac{23}{6}\frac{t^{-4+1}}{-4+1} = \frac{23}{-18t^3} =$$

$$\frac{\mathbf{23}}{-\mathbf{18}(\mathbf{6}\boldsymbol{x}+\mathbf{11})^{\mathbf{3}}}+\boldsymbol{C}$$

Queremos indicar un "atajo" una vez que ya hemos visto cómo se relacionan los diferenciales. Cuando hacemos un cambio de variable, en vez de utilizar la definición de derivada podemos hacer lo siguiente para relacionar los diferenciales, es más corto:

$$6x+11=t$$

Relacionar los diferenciales por la derivada es equivalente a:

Derivada de la izquierda respecto de "x" por diferencial de x = Derivada de la derecha respecto de "t" (como si "t" es la variable) por diferencial de "t".
En nuestro caso

$$\mathbf{6}\boldsymbol{dx}=\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{dt}\rightarrow\boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{dt}}{\mathbf{6}}$$

Llegando a la misma relación entre los diferenciales. Vamos a seguir practicando.

Ejemplo 3
Calcular la integral

$$\int \sqrt{\mathbf{8x+4}}\,\boldsymbol{dx}$$

Vemos claramente la función lineal $8x+4$. Por lo tanto

$$\int \sqrt{8x+4}\,dx = \left|8x+4=t \to 8dx = 1\cdot dt \to dx = \frac{dt}{8} \to\right| =$$

$$\int \sqrt{t}\frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{8}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{8}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12}\sqrt{t^3} =$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{12}\sqrt{(8x+4)^3}+C}$$

Ejemplo 4
Calcular la integral

$$\int \boldsymbol{e^{-x}dx}$$

Esta integral, como otras muchas si tenemos práctica, se pueden hacer “a ojo”. Pero como no es el papel de este manual ejercitar el ojo sino el razonamiento y métodos “mecánicos”, la vamos a hacer por cambio de variable. Pensamos que, en esta fase del aprendizaje, es mejor tener el instrumental necesario para poder aplicar siempre, en cualquier caso, aunque el problema parezca muy fácil, como es este. En este caso, la función lineal es *-x*

$$\int e^{-x}dx = |-x=t \to -dx = dt \to dx = -dt| = \int e^{t}(-dt) =$$

$$-\int e^{t}dt = -e^{t}+C = \boldsymbol{-e^{-x}+C}$$

SEGUNDO CAMBIO DE VARIABLE
HAREMOS $\boldsymbol{f(x)=t}$ SI EN LA INTEGRAL APARECE $\boldsymbol{f'(x)dx}$.

Llamaremos t a cualquier función que aparezca en la integral, INDEPENDIENTEMENTE DE DONDE ESTÉ, dentro de un seno, al cubo…SI EN LA INTEGRAL APARECE SU DERIVADA MULTIPLICANDO A dx. ADEMÁS, SOLO NOS IMPORTA QUE APAREZCA LA PARTE FUNCIONAL DE LA DERIVADA sin los números que la puedan acompañar. Por ejemplo, si nos aparece $\boldsymbol{x^3\ y\ x^2dx}$ NOS VALE, aunque no esté $\boldsymbol{3x^2dx}$.

Al hacer este cambio, despejamos *f ‘(x)dx* que es lo que aparece en la integral, y no *dx* como en el cambio anterior.

Ejemplo 5
Calcular la integral

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2dx}}{\sqrt{\boldsymbol{x^3+3}}}$$

Debemos de ver que dentro de la raíz hay una función, $\boldsymbol{x^3+3}$, y su derivada en la parte funcional, $\boldsymbol{x^2}$, multiplicando al *dx*. Según lo que hemos dicho hemos de hacer, entonces, $\boldsymbol{x^3+3=t}$. Y repetimos, no nos importa que la función $\boldsymbol{x^3+3}$ esté dentro de una raíz.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+3}} = \left| x^3+3=t \to 3x^2dx=dt \to x^2dx=\frac{dt}{3} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{3}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\int t^{\frac{-1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} = \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3}+C}$$

Ejemplo 6

$$\int \frac{\mathbf{1dx}}{\boldsymbol{x}\sqrt{\mathbf{1}-(\boldsymbol{lnx})^{2}}}$$

Hemos de ver que aparece la función *Lnx* y su derivada, $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$, multiplicando al ***dx***. No nos importa donde esté la función cuya derivada está multiplicando a ***dx*** (insistimos)

$$\int \frac{1dx}{x\sqrt{1-(lnx)^{2}}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-(lnx)^{2}}} \cdot \frac{1}{x}dx = \left|Lnx = t \rightarrow \frac{1}{x}dx = dt\right|$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^{2}}} = arcsent = \boldsymbol{arcsenLnx + C}$$

Ejemplo 7

$$\int (\boldsymbol{senx})^{3}\boldsymbol{cosxdx}$$

Hemos de ver que está la función *senx* (como ya hemos dicho en las anteriores, no nos importa donde esté la función que vamos a llamar “t”) y su derivada, ***cosx***, multiplicando a ***dx***. Por lo tanto, ***senx=t***

$$\int (senx)^{3}cosxdx = |senx = t \rightarrow cosxdx = dt| =$$

$$\int t^{3}dt = \frac{t^{4}}{4} = \frac{(senx)^{4}}{4} + C$$

Aparentemente las tres integrales no se parecen en nada, pero las tres contienen una función, que es a la que hemos llamado t, y su derivada multiplicada por dx. Por lo tanto, las tres pertenecen al segundo tipo de cambio de variable. Ocurrirá que después de hacer el cambio de variable la integral no sea inmediata como en los ejemplos anteriores pero seguro que pertenecerá a un grupo **más conocido. Siempre aplicar estos cambios de variable si se puede,** la integral se transformará en otra más simple.