CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función $y = f(x)$ es continúa en $x = x_0$ si cumple las siguientes tres condiciones:

Primera: existe $\boldsymbol{f(x_0)}$

$$\exists \boldsymbol{f(x_0)}$$

Segunda: existe el límite cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{x_0}$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \to \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Tercera: ambas cosas son iguales:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Para estudiar la continuidad de una función en un punto lo único que tenemos que hacer es deducir si se cumplen o no las tres condiciones. Gráficamente, podemos decir que si una función es continua en un punto la podremos dibujar al pasar por él sin “levantar el lapicero”.

Veamos un ejemplo. Se resuelven más problemas en el apartado de “ejercicios”.

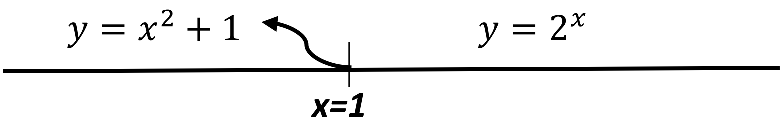
Ejemplo 1

Sea la función definida a trozos

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x \leq 1 \\ 2^x & si \quad x > 1 \end{cases}}$$

Determinar si es continua en $\boldsymbol{x = 1}$

Antes de ***x=1,*** la función es un polinomio, función continua para todo valor de ***x***. Después de ***x=1*** la función es una exponencial también continua para todo valor de ***x***. El problema lo tenemos en ***x=1*** **pues a su izquierda la función está definida de una manera y a su derecha de otra y puede pasar que las gráficas no se unan de la manera "adecuada",** que en ese punto no se cumplan las tres condiciones. Para poder deducir si es continua en $x = 1$ aplicamos la definición y nos ayudamos de la siguiente gráfica. La flecha que parte de ***x=1*** significa que la **función SÍ está definida en él por medio del polinomio, según el enunciado.**



Primera condición:

$$\exists \boldsymbol{f(1)}?$$

En el enunciado, y como se ha reflejado en la figura, Sí está definida la función en ***x=1*** por medio del polinomio

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

Segunda condición:

$$\exists \lim_{x \to 1} f(x)?$$

Como a la izquierda de ***x=1*** la función está definida de una manera y a la derecha de otra, tenemos que calcular los límites laterales:

Por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

Por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2^x = 2^1 = 2$$

Al ser ambos límites iguales podemos decir que el límite existe

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Viendo los resultados comprobamos que se **cumple también la tercera condición**:

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Por lo tanto, ya podemos decir que esta función es continua en *x=1*. También, como ya se ha dicho, en todos los demás valores de x.