RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DISTINTOS

Es muy típico, y además importante para el conocimiento de este tema, el saber relacionar las razones trigonométricas de un ángulo dado con las de otro que tiene que ver algo con él geométricamente. Como en la mayoría de los casos, vamos a resolver varios ejemplos para que se entienda bien el tipo de problemas. Advertimos que las conclusiones a las que vamos a llegar no hace falta aprendérselas de memoria, vamos a intentar que se entienda y entonces podemos prescindir de un montón de fórmulas que lo único que hacen es complicar y cargar la memoria innecesariamente.

Ejemplo1

Conocido el $\boldsymbol{sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\ y\ \alpha \in II\ cuadrante}$ ***calcular las razones trigonométricas de:***

$\boldsymbol{\pi + \alpha}$

Lo primero que hacemos es conocer las razones trigonométricas del ángulo dado, alfa, como se ha hecho en la lección anterior. Como vamos a ver, las vamos a utilizar en la resolución.

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow$$

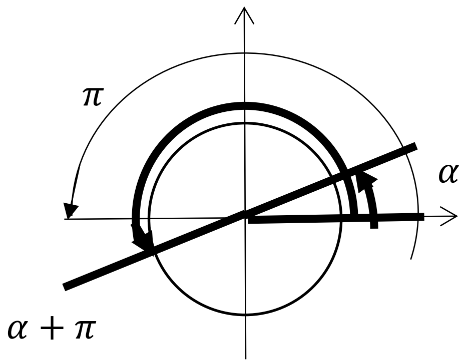
$$cos\alpha = \pm\frac{1}{2}\ elegimos\ el\ signo\ menos\ por\ \alpha \in II$$

Por lo tanto:

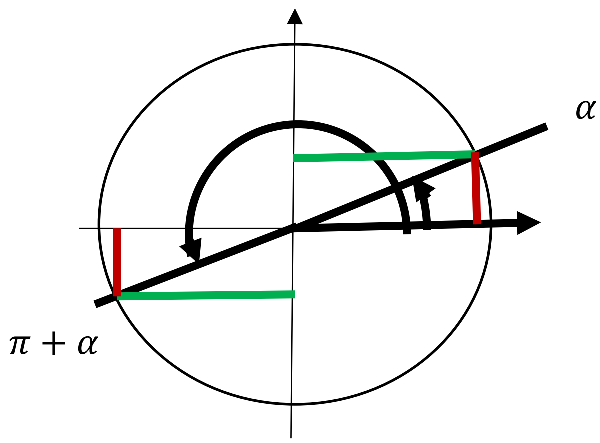
$$\boldsymbol{sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; cos\alpha = -\frac{1}{2}; tg\alpha = -\sqrt{3}}$$

Para calcular las razones trigonométricas de $\pi + \alpha$ **es absolutamente fundamental** dibujar en la circunferencia los ángulos $\alpha \; y \; \pi + \alpha$, **dibujando α siempre en el primer cuadrante**, aunque no lo esté como es nuestro caso, **porque la relación entre las razones trigonométricas de $\alpha \; y \; \pi + \alpha$ no depende del cuadrante donde esté α**. Además**, lo dibujaremos no especialmente "guapo", como el de 45 grados, porque podemos llegar a conclusiones erróneas que sólo sirven para él**.

Recordando cómo se suman ángulos del primer capítulo:



Una vez dibujados los ángulos, dibujamos sus senos en rojo y sus cosenos en verde:



Creemos fácil ver que **las dos líneas verdes son iguales en longitud**, **pero opuestas en signo pues una está a la derecha (anchura, "x" positiva) y la otra a la izquierda (anchura, "x" negativa). Por lo tanto, son dos números iguales en valor absoluto pero opuestos:**

$$\boldsymbol{cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha} = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Daría lo mismo decir que $cos\alpha = -\cos(\pi + \alpha)$, pues lo único que sabemos y queremos decir es que son opuestos (no significa que el coseno negativo es el que lleva el signo menos, aunque pueda coincidir)

También vemos que **las dos líneas rojas son iguales en longitud, pero opuestas también en signo, pues una altura es positiva y la otra negativa,** por lo tanto:

$$\boldsymbol{sen(\pi + \alpha) = -sen\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

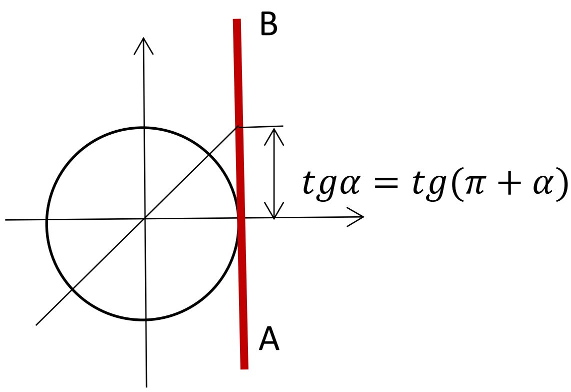
Resumiendo

$$\boldsymbol{\begin{cases} sen(\pi + \alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ cos(\pi + \alpha) = \dfrac{1}{2} \end{cases}}$$

Una vez relacionados los senos y cosenos, ya no nos hace falta la figura para relacionar las demás. En nuestro caso:

$$\boldsymbol{tg(\pi + \alpha)} = \frac{sen(\pi + \alpha)}{cos(\pi + \alpha)} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{-\sqrt{3}}$$

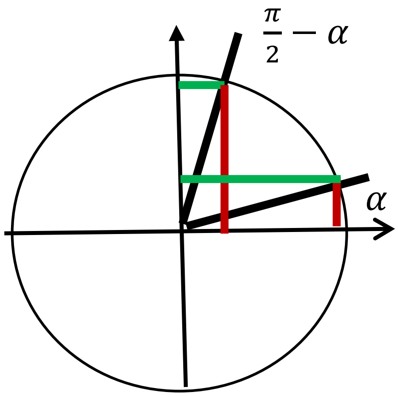
Un comentario que conviene saber. La línea de las tangentes es la línea roja $\overline{AB}$ de la figura y, como vemos, ambos ángulos la tienen igual, incluido el signo (las dos son negativas en nuestro caso)



Ejemplo 2

Con los mismos datos para α, calcular las de $\frac{\pi}{2}+\alpha$

Como antes, dibujamos los dos ángulos



Si observamos hay líneas claramente iguales en longitud, pero no las rojas entre sí (los senos de los dos ángulos) ni las verdes entre sí (los cosenos) **sino que la altura roja (seno) de α coincide en longitud con la anchura verde (coseno) de $\frac{\pi}{2}-\alpha$**. Como además las dos son del mismo signo, las dos positivas, diremos que son exactamente iguales:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De la misma manera, vemos que la línea verde del ángulo α, su coseno, coincide en longitud y signo (las dos son positivas) con la línea roja de $\frac{\pi}{2}-\alpha$, su seno. Por lo tanto, decimos:

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos\alpha=-\frac{1}{2}$$

Conocidos ya el seno y el coseno, la tangente es

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$