MOMENTO DE INERCIA

Si tenemos un sólido rígido formado por ***n*** **partículas girando respecto de un eje fijo**, en las demostraciones aparece **la suma del producto de la masa de una partícula por su distancia al eje al cuadrado**, la expresión

$$\sum_{n=1}^{n} m_i \cdot (D_i)^2 = I$$

Llamada momento de inercia y que**, para un eje determinado, toma un valor constante** y depende de las posiciones de las masas respecto del eje pues D_i **es la distancia de la partícula** m_i **al eje en cuestión**, y en un sólido rígido esa distancia permanece constante. **Evidentemente un cuerpo tiene infinitos momentos de inercia según el eje respecto del que gira**. Para hacernos una idea "intuitiva" podemos pensar que es la "resistencia" que ofrece el cuerpo a girar sobre ese eje.

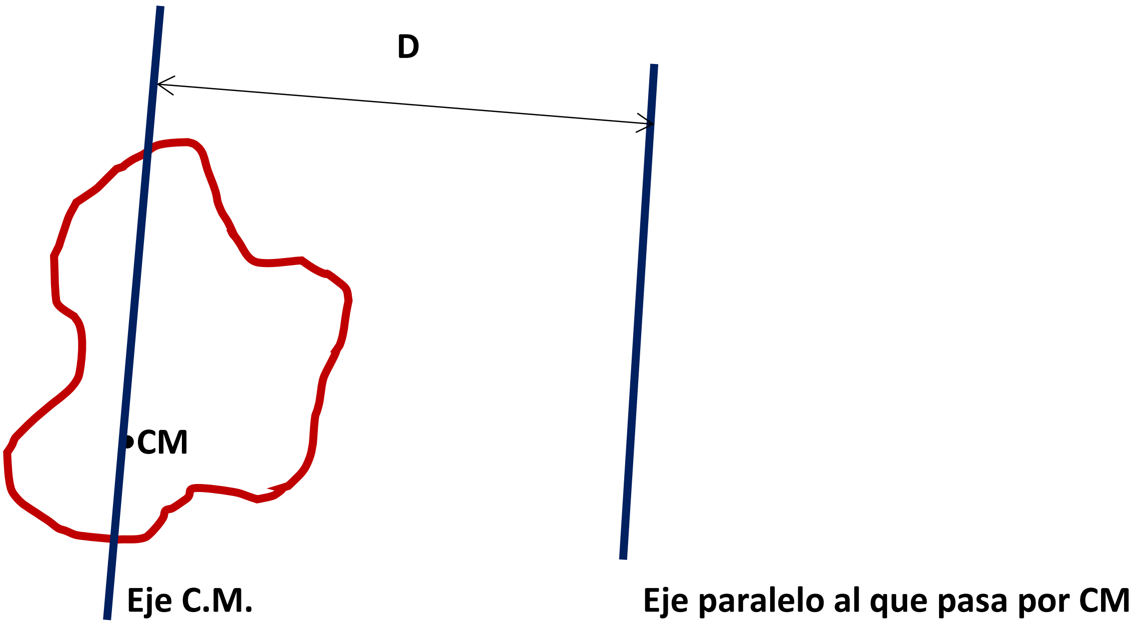
Si el cuerpo es una masa continua la expresión sumatorio se transforma en una integral y tenemos:

$$I = \iiint (D)^2 dm$$

Aplicada la integral a todo el volumen que ocupa la masa. Felizmente los **momentos de inercia de los cuerpos que vamos a utilizar están tabulados respecto a ejes que pasan por el centro de masas y se suelen dar como dato**. Es por ello por lo que, salvo en casos sencillos, no tendremos que utilizar la expresión sumatorio o integral. Pero ¿qué pasa si el eje respecto del cual gira nuestro cuerpo no pasa por el ***C.M.*** y no lo tenemos en la tabla?

Para ello tenemos:

TEOREMA DE STEINER:



$$\mathbf{I}_{\mathbf{eje\ paralelo}} = \mathbf{I}_{\mathbf{CM}} + \mathbf{MD^2}$$

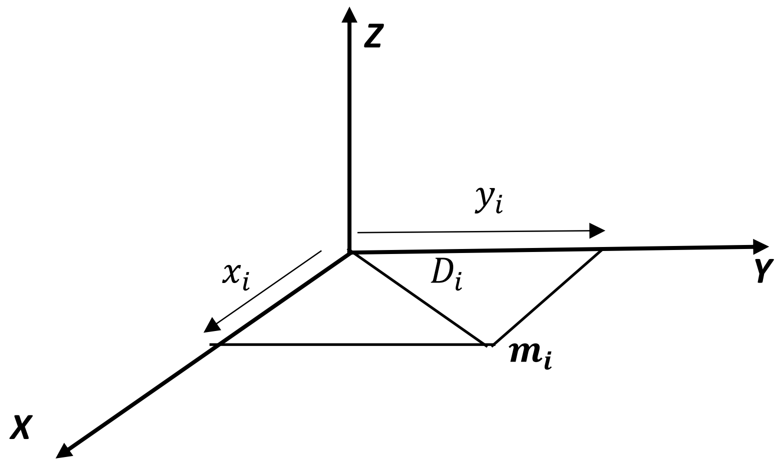
Esta expresión es la que se conoce como teorema de Steiner y **nos sirve para, conociendo el momento de inercia respecto de un eje que pasa por el CM, conocer los momentos de inercia respecto a cualquier eje paralelo a él.**

Si tenemos tres ejes, hay expresiones que nos relacionan sus momentos de inercia si se cumplen ciertas condiciones. Una de ellas es el llamado teorema de los ejes perpendiculares.

TEOREMA DE LOS EJES PERPENDICULARES

Si tenemos un sólido plano, podemos relacionar los momentos de inercia de **dos ejes perpendiculares que se apoyen en la superficie del cuerpo** con el momento de inercia respecto de un eje perpendicular a ambos y que pase por el mismo punto. Esta relación se denomina el teorema de los ejes perpendiculares.

Vamos a relacionar el valor del momento de inercia respecto al eje ***0Z***, perpendicular los ejes ***0X y 0Y.***



El momento de inercia I_z, que aplicando la definición es

$$I_z = \sum m_i D_i^2$$

Según la figura, vemos que la distancia D_i es la hipotenusa de un triángulo en el que los otros dos catetos son las distancias de la partícula a los ejes ***0X y 0Y***

$$D_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

Sustituyendo en la expresión:

$$I_z = \sum m_i D_i^2 = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = \sum (m_i \cdot x_i^2) + \sum (m_i \cdot y_i^2)$$

Los últimos sumatorios corresponden a los momentos de inercia respecto al eje ***0X y 0Y,*** por lo tanto:

$$\boldsymbol{I_z = I_x + I_y}$$

Estos dos simples teoremas nos permiten calcular muchos momentos de inercia a partir de las tablas.