DEFINICIÓN (intuitiva) DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

La idea de límite no es una idea sencilla o que aparezca intuitivamente. La célebre historia de Aquiles y la tortuga estuvo sin solución durante varios miles de años, lo que nos una idea de su complejidad. De ella hablaremos en un apéndice.

Hasta ahora los números sólo eran “estáticos”, ocupan su lugar en la recta de los números reales y ya está. Sin embargo, la idea de límite incorpora el concepto de movimiento, **va a estudiar que ocurre con una función cuando la variable “se acerca” a un valor dado**. La idea de acercarnos ya nos da una idea de movimiento. Con todo ello, resumiendo, vamos intentar explicarnos, pero aconsejamos que se repose tranquilamente sobre las ideas de las que vamos a hablar. En todos los campos creemos que hay que depender lo menos posible de la memoria, pero en este caso especialmente.

Veamos varios ejemplos

Ejemplo 1

Tengamos la función

$$\boldsymbol{y = 3x - 1}$$

Esta **función toma el valor de dos para el valor de la variable *x=1*. Además, si “x” va tomando valores próximos a *x=1*, la función toma valores más próximos a dos *y=2*.** Vemos entonces que calcular el valor de la función a medida que la variable se acerca a otra no parece ser complicado.

Vamos a ver que no siempre es así. Por ejemplo, estudiemos la siguiente función.

Ejemplo 2

Sea la función:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Como hemos hablado en la lección de dominios, **esta función no existe para $x = 1$** puesto que

$$y(1) = \frac{0}{0}$$

expresión que, como debemos de saber, no tiene ningún sentido. Sin embargo, **NOS PREGUNTAMOS ¿QUE PASA SI NOS ACERCAMOS A *X=1*? ¿QUÉ PASA EN LOS ALREDEDORES DE *X=1*?**

Para ello construimos la siguiente tabla:

x	y
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	**1,999**
1,0001	**2,0001**
1,001	2,001
1,01	2,01
1,1	2,1

Como podemos ver en la tabla, "parece" que acercándonos a $x = 1$ tanto por encima ($x > 1$) como por debajo $(x < 1)$ la función se acerca a $y = 2$. A medida que nos acercamos a $x = 1$, el numerador y el denominador se acercan a cero, PERO NO SON CERO, son números muy pequeños, pero su cociente nos indica que el numerador tiende a ser el

doble que el denominador y por lo tanto la función, el cociente, se acerca a 2.

Para demostrarlo rigurosamente y con menos trabajo, podemos efectuar los siguientes cálculos, que aparecerán también en la resolución de algunos ejercicios posteriores:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

Como veíamos en la tabla. Hemos descompuesto por Ruffini el numerador y simplificado los paréntesis $(x-1)$ del numerador y del denominador. Los dos factores simplificados se **acercaban a cero, pero no lo eran.** Por ser el mismo número su cociente es uno y, por supuesto, se puede y debe simplificar. Una vez simplificado, vemos claramente que, si ***"x"*** se acerca a uno, "***x+1"*** se acerca a dos que es el resultado.

Acabamos de ver otra vez a qué valor se acerca la función cuando la variable se acerca a otro. Pero en este caso, al contrario que en el caso anterior, **hemos tenido que investigar porque teníamos el cociente de dos números muy pequeños y su valor depende de cada caso. Por eso, cuando nos aparezca el cociente 0/0 diremos que tenemos una indeterminación.** En el siguiente ejemplo vemos que otro cociente de ese tipo no da como resultado cuatro, y no dos como el ejemplo anterior.

Ejemplo 3

Sea la función:

$$y=\frac{x^2-4}{x-2}$$

A esta función le pasa lo mismo que a la función anterior, pero en ***x=2***:

$$y(2)=\frac{0}{0}$$

Claramente hacemos lo mismo que en el caso anterior. Se trata también de un cociente de polinomios, los descomponemos por Ruffini

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

Como habíamos adelantado, **el cociente de dos números muy pequeños puede dar muy distintos resultados, por lo que dicho resultado depende de la expresión matemática que tengamos y se llama por eso indeterminación**.

En la siguiente lección vamos a ver que existen otras expresiones que, por la misma razón que la explicada, llamamos indeterminación. Y también veremos como se resuelven los cuatro tipos que tenemos en 1º de bachiller.