victor loza
ACADEMIA ONLINE

DISTANCIAS Y ÁNGULOS

ÁNGULOS

En este apartado, sólo tenemos tres casos: ángulo que forman dos rectas, ángulo entre recta y plano y ángulo entre dos planos. Veamos.

ÁNGULO QUE FORMAN DOS RECTAS

El ángulo que forman dos rectas es el ángulo que forman sus vectores. Si tenemos las rectas ***r y s*** definidas por las ecuaciones continuas (si tuviéramos las ecuaciones paramétricas o como intersección de dos planos debemos saber deducir de ellas cuáles son los vectores de las rectas, igual que si tenemos las ecuaciones continuas, como es el caso)

$$r \equiv \frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z}$$

$$s \equiv \frac{x-x_0'}{t_x}=\frac{y-y_0'}{t_y}=\frac{z-z_0'}{t_z}$$

Sus vectores son

$$\begin{cases} r: \vec{v}_r=(v_x,v_y,v_z) \\ s: \vec{t}_s=(t_x,t_y,t_z) \end{cases}$$

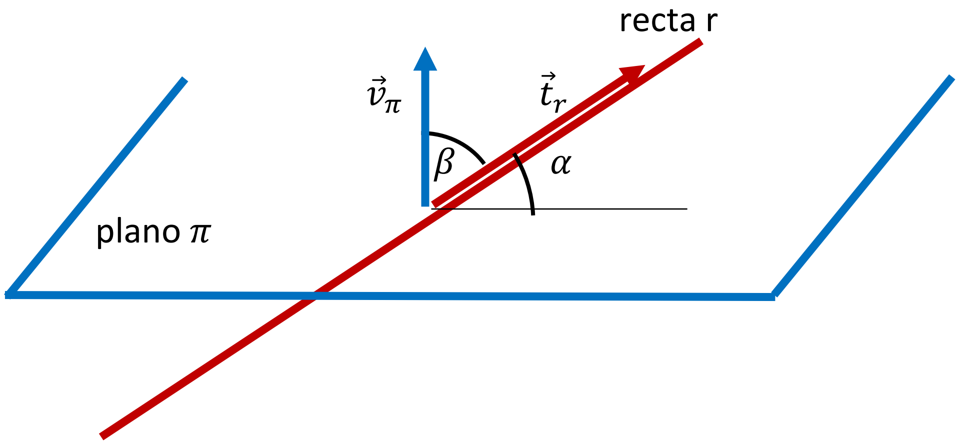
Recordando la fórmula que proviene del producto escalar que nos da el ángulo entre dos vectores, tenemos

$$\cos\alpha=\left|\frac{v_x\cdot t_x+v_y\cdot t_y+v_z\cdot t_z}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{t}_s|}\right|$$

Donde hemos puesto el valor absoluto porque dos rectas forman dos ángulos que suman ***180*** grados. Al poner el valor absoluto calculamos el ángulo más pequeño de los dos que es el que, por convenio, damos como solución.

ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

Si nos fijamos en el dibujo



Tenemos que ver que el ángulo cuyo coseno podemos calcular es el ángulo β. Pero el ángulo que forma la recta y el plano es el ángulo α que es complementario de β. Por ser dos ángulos complementarios se cumple

$$cos\beta = sen\alpha \rightarrow$$

$$cos\beta = \frac{\boldsymbol{\vec{v}_\pi \cdot \vec{t}_r}}{\boldsymbol{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{t}_r|}} = \boldsymbol{sen\alpha}$$

La fórmula en negrita es la que utilizaremos. Si los vectores de la recta y el plano son

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (v_x, v_y, v_z) \\ \vec{t}_r = (t_x, t_y, t_z) \end{cases} \rightarrow$$

La fórmula en función de sus componentes que utilizaremos es:

$$\boldsymbol{sen\alpha} = \left| \frac{\boldsymbol{v_x \cdot t_x + v_y \cdot t_y + v_z \cdot t_z}}{\boldsymbol{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{t}_s|}} \right|$$

Donde los módulos de los vectores se calculan con la expresión que tenemos para ellos.

ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

El ángulo que forman dos planos es el que forman sus vectores perpendiculares. Estos vectores se denominan en muchos textos como vectores directores del plano y aquí así lo haremos también. Por lo tanto, si tenemos los dos planos definidos por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A_1x + B_1y + C_1 + D_1 = 0 \end{cases}$$

Sus vectores directores son

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (A, B, C) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (A_1, B_1, C_1) \end{cases}$$

Y el ángulo que forman los planos será:

$$\boldsymbol{cos\alpha} = \left| \frac{\boldsymbol{A \cdot A_1 + B \cdot B_1 + C \cdot C_1}}{|\boldsymbol{\vec{v}_{\pi_1}}| \cdot |\boldsymbol{\vec{v}_{\pi_2}}|} \right|$$

Pasamos a calcular las distancias entre los distintos objetos, puntos, rectas y planos.

DISTANCIAS

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

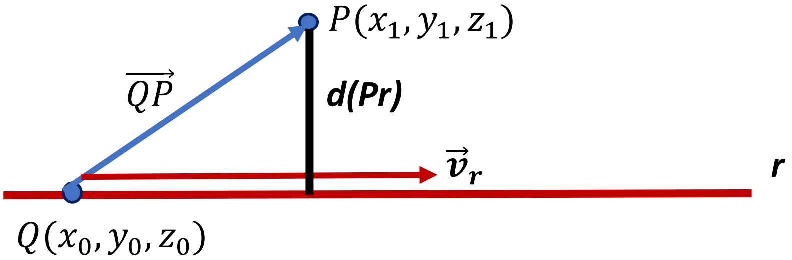
La distancia entre dos puntos se calcula fácilmente como el módulo del vector que va de uno a otro

$$P(p_1, p_2, p_3)\ y\ Q(q_1, q_2, q_3) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \rightarrow$$

$$\boldsymbol{d(PQ)} = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(\boldsymbol{q_1 - p_1})^2 + (\boldsymbol{q_2 - p_2})^2 + (\boldsymbol{q_3 - p_3})^2}$$

DISTANCIA ENTRE PUNTO Y RECTA

Sea la recta ***r*** y el punto ***P***. La fórmula que utilizaremos para calcular la distancia del punto a la recta es:



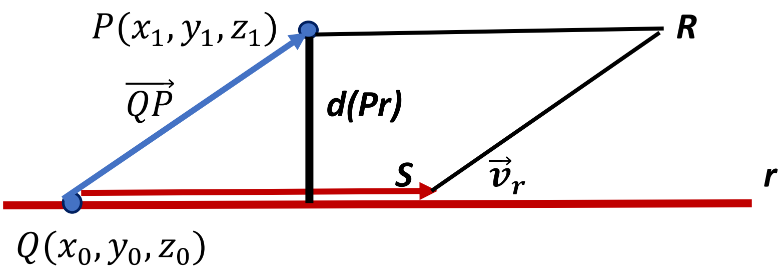
La distancia del punto a la recta, ***d(Pr),*** la calculamos según

$$\boldsymbol{d}(\mathbf{P}, \mathbf{r}) = \frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{QP}} \times \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}|}{|\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}|}$$

Donde el vector $\overrightarrow{QP}$ va desde un punto cualquiera de la recta, Q, al punto P.

El vector $\vec{v}_r$ es el vector director de la recta

Añadimos en este caso una explicación que justifica la fórmula anterior. Ya hemos comentado en alguna ocasión que no es nuestro papel, pensamos, demostrar todas las afirmaciones y fórmulas que aparecen en todas nuestras lecciones. Sin embargo, pensamos que las demostraciones son interesantes en cuánto nos enseñan a pensar (objetivo fundamental de la enseñanza, aunque a veces parezca lo contrario y sobre lo que no queremos ni debemos hablar aquí). Por eso, aunque no hagamos todas, si que hacemos las que creemos que pueden ayudar a entender mejor las cosas o, como en este caso, nos enseñan a utilizar los instrumentos para llegar a conclusiones. Veamos



El producto vectorial $\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_r$, como sabemos, es el área del paralelogramo QPRS. Como esa área es igual al área de la base, $|\vec{v}_r|$, por la altura del paralelogramo que es la distancia del punto a la recta, nos queda

$$A = \left|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_r\right| = |\vec{v}_r| \cdot d(\mathrm{p}, \mathrm{r}) \rightarrow \boldsymbol{d}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{QP}} \times \vec{\boldsymbol{v}}_r\right|}{|\vec{\boldsymbol{v}}_r|}$$

Que es la fórmula que hemos dado.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

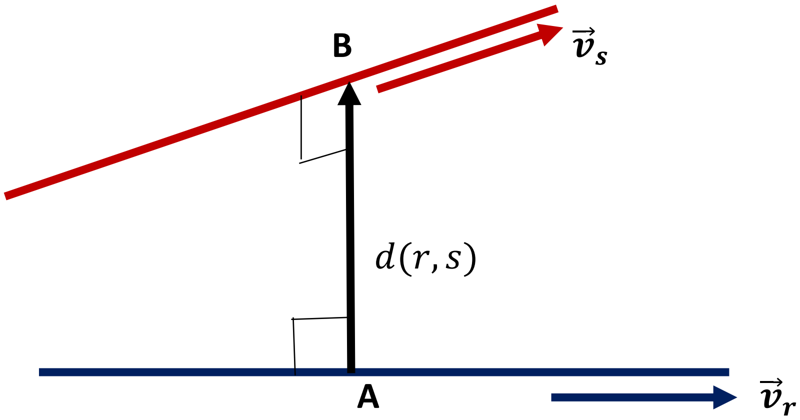
Si tenemos el plano π y el punto P

$$\boldsymbol{\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0} \quad \boldsymbol{P(x_0, y_0, z_0)}$$

La distancia entre ellos viene dada por

$$\boldsymbol{d(P\pi)} = \left|\frac{\boldsymbol{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}}{\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2 + C^2}}}\right|$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN



La distancia entre dos rectas que se cruzan se define como la distancia entre los puntos A y B pertenecientes a cada una de ellas si el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a las dos, como se ha intentado reflejar en el dibujo.

La fórmula para utilizar es:

$$\boldsymbol{d(r,s)} = \frac{\left|\left[\vec{v}_r \vec{v}_s \overrightarrow{P_r Q_s}\right]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

Donde P_r es un punto cualquiera de la recta r y Q_s un \`punto cualquiera de la recta s.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

Una vez comprobado que las dos rectas dadas son paralelas**, para calcular su distancia basta elegir un punto cualquiera de una de ellas y calcular la distancia de ese punto a la otra**, **utilizando la fórmula de distancia de punto a recta** que se ha dado en el apartado de “distancia de punto a recta”.

victor loza
ACADEMIA ONLINE

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

Parecido a el caso anterior, para calcular la distancia entre dos planos paralelos (una vez comprobado que lo son), **elegiremos un punto cualquiera de uno de ellos y calcularemos la distancia de ese punto al otro plano, utilizando la fórmula de punto a plano dada ya anteriormente**.